



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
KATEDRA FYZIKÁLNÍ ELEKTRONIKY

LASEROVÁ TECHNIKA 1

Část I. OTEVŘENÉ REZONÁTORY

Učební texty k přednášce

Doc. Ing. Václav KUBEČEK, DrSc.

Praha 2001

Přednáška Laserová technika 1, Z, 2+1 z,zk,

Přednášející : Doc. V. Kubeček, Prof. M. Vrbová, Cvičení: Ing. A. Dombrovský

Obsah kurzu ve školním roce 2001/02

Studenti:

Část I. OTEVŘENÉ REZONÁTORY - Kubeček (P 1-6)

P. 1

Laserové oscilace a módy otevřeného rezonátoru

Laser, laserové atomy a čerpání, nutná podmínka pro dosažení laserové akce,.....

Podélné a příčné módy

P2

Rozložení intenzity jednotlivých příčných módů OR

(Hermittovy polynomy, Laguerrovy polynomy)

Gaussovský svazek jako approximace základního příčného módu

Charakteristiky gaussovských svazků

Šíření gaussovského svazku

Průchod gaussovského svazku kruhovou aperturou

P3

Nalezení základního příčného módu pro dvouzrcadlový rezonátor

Základní typy dvouzrcadlových rezonátorů

(planparallelní, konfokální, sférický, konkávní-konvexní, hemisférický)

P4

Stabilita otevřeného rezonátoru

Podmínka stability, g-parametry

Difrákční ztráty, Fresnelovo číslo

Aktivní rezonátor (s čočkou)

P5

Řešení otevřených rezonátorů maticovou metodou

Definice přenosové matice opt. soustavy

Přenosové matice jednoduchých soustav

Perodické soustavy

Transformace gauss. svazku

Řešení obecného rezonátoru

P6

Podélné módy

Fabry Perotův rezonátor (transmise, reflexe, finesa,)

Laserový rezonátor

Rezonanční reflektor

Prvky otevřených rezonátorů

Nestabilní rezonátory

Část I. AKTIVNÍ PROSTŘEDÍ - Vrbová (P 7-12)

P7

Poločasická teorie

Vlnová rovnice, polarizace prostředí

Odezva rezonančního prostředí

Základní fyzikální charakteristiky aktivního prostředí

Odezva na harmonický signál.

P8

Šíření monochromatického záření v rezonančním prostředí

Dispersní vlastnosti. Susceptibilita

Součinitel zesílení, saturace

P9

Šíření optických impulsů

Pomalu proměnné veličiny

Stacionární signál bez fázové modulace

Koherentní a nekoherentní šíření

Rychlostní rovnice

P10

Šíření velmi krátkých optických impulsů

Plocha impulsu

Samoindukovaná propustnost, soliton

Optická nutace

P11

Kolektivní jevy

Fotonové echo

Superadiace

Superluminiscence

P12

Zesílená spontánní emise

Saturace media zesílenou spontánní emisí

Lasery bez zrcadel, měkký práh, příklady

LASEROVÁ TECHNIKA 1

Otevřené rezonátory-přednášky 1-4. File: OtevrenerezonatoryI.doc

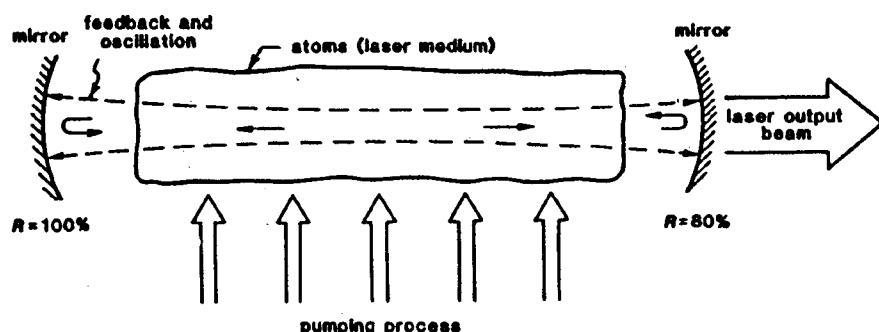
Přednáška 1. -středa, 29. září 1999, Pátek 5. října 2001

I. REKAPITULACE ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Laser- zařízení pro generaci či zesilování koherentního záření v infračervené, viditelné nebo ultrafialové oblasti spektra

1960- rubínový laser (T. Maiman, USA)

Základní části laseru



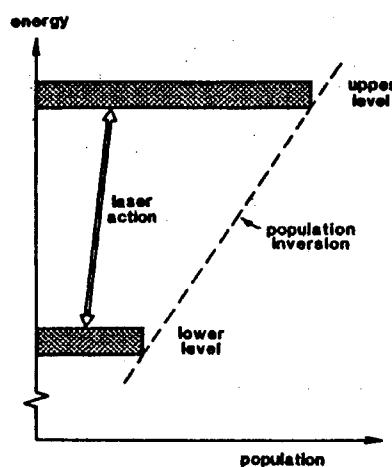
Obr. 1. Základní části laseru

- aktivní prostředí, (soubor vhodných atomů, molekul, iontů)
- čerpací (budící) proces –proces pro excitaci těchto atomů (molekul) do vyšších energetických hladin
- vhodný optický zpětnovazební element, který umožňuje jeden průchod záření aktivním mediem (laserový zesilovač) či opakováné průchody (laserový oscilátor)

Laserové „atomy“ a čerpání

- „Atomy“ - budeme tak označovat dále všechny atomy, molekuly, ionty, elektrony v polovodičích, které se používají jako laserové aktivní prostředí
- Čerpání - proces potřebný k tomu, aby byly tyto atomy vybuzeny (excitovány) do vyšších kvantově mechanických energetických hladin.

Nutná podmínka pro dosažení laserové akce: Dosažení inverzního obsazení hladin (inverze populace)

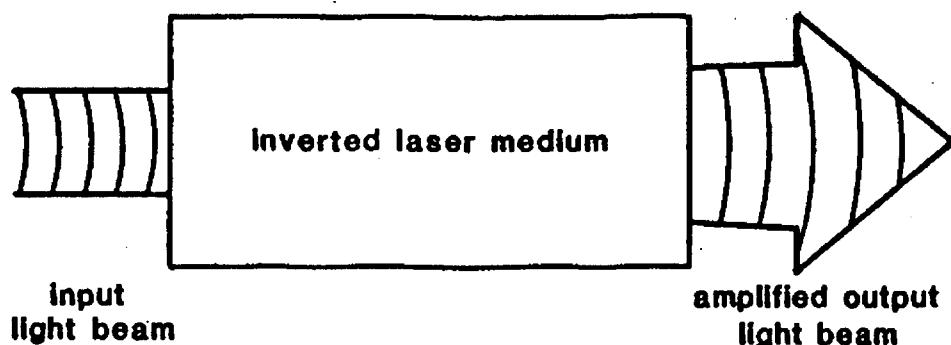


Inverze populace
mezi dvěma kvantově mechanickými
hladinami.

Obr. 2. Inverze populace mezi dvěma kvantově mechanickými hladinami

Laserové zesilování (koherentní):

Je-li dosaženo inverze populace hladin, pak v tomto prostředí může být koherentně zesilováno elektromagnetické záření určitého úzkého spektrálního pásma.

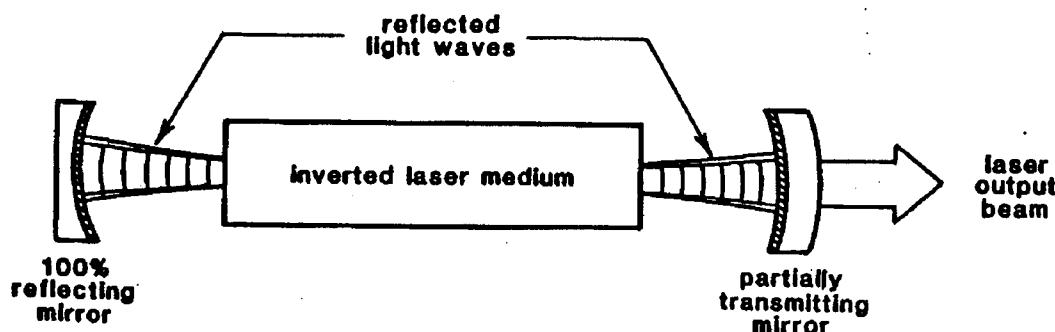


Obr. 3. **Koherentní zesilování** = výstupní signál je kopíí vstupního signálu, kromě podstatného zvýšení amplitudy (+ eventuální malý fázový posuv a šum)

Laserové oscilace- generace: koherentní zesilování + zpětná vazba = oscilace

Zpětná vazba je v laserové technice realizována zrcadly, mezi nimiž je umístěno laserové prostředí. Zrcadla musejí být nastavena přesně tak, aby elmag. vlnění po odrazu na jednom zrcadle dopadlo na druhé zrcadlo atd.

Jsou-li ztráty způsobené odrazy a průchodem vlnění menší než zesílení = koherentní signál bude narůstat, dojde ke generaci



Obr. 4. Vznik laserových oscilací v rezonátoru obsahujícím invertované aktívni prostředí

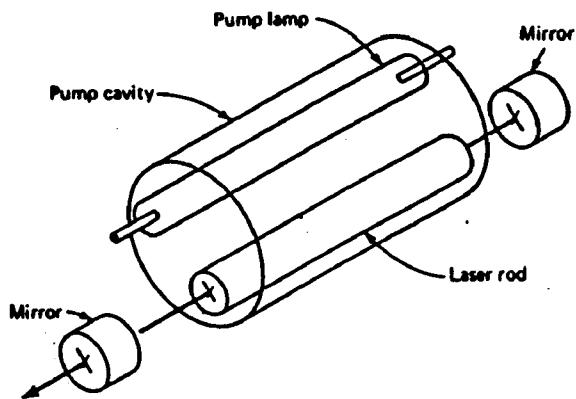
Vysoko směrový a monochromatický elektromagnetický svazek vychází skrz částečně propustné zrcadlo.

Rezonátor určuje:

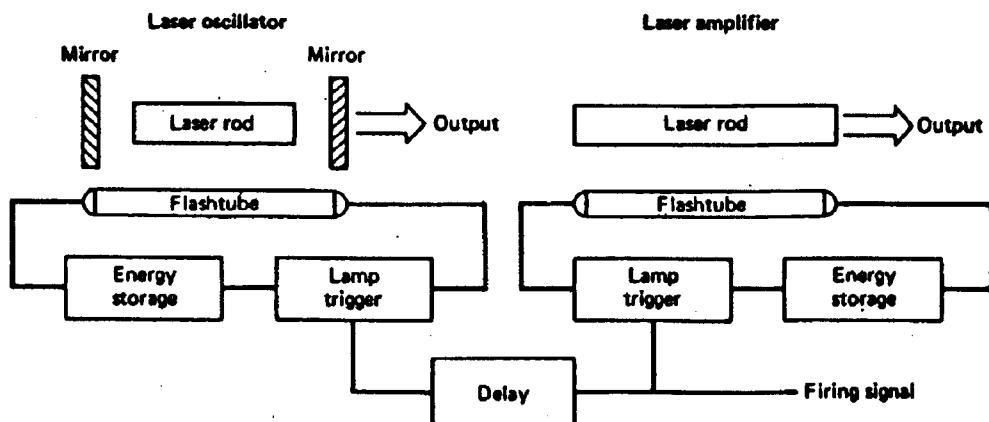
- spektrální
 - směrové
 - prostorové
- charakteristiky výstupního záření

Zesilující prostředí – slouží jako zdroj energie.

Ukázky možného uspořádání oscilátoru a zesilovače pevnolátkového laseru.



Obr. 5. Ukázka možného uspořádání hlavice a rezonátoru pevnolátkového laseru s výbojkovým buzením



Obr. 6. Blokové schema sestavy oscilátor-zesilovač

Oscilátor určuje

šířku impulsu

divergenci svazku

spektrální vlastnosti záření

-

-

Zesilovač určuje

energií a výkon záření

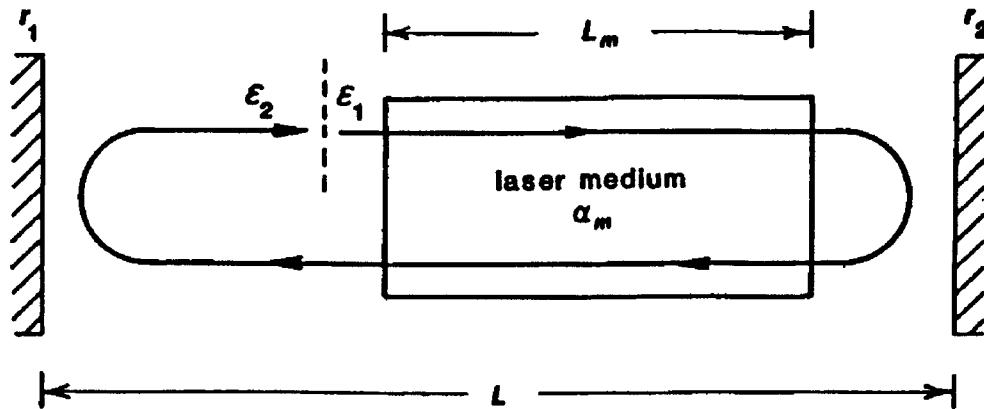
zvyšuje jas $[W \text{ cm}^{-2} \text{ sr}^{-1}]$

To byla rekapitulace základních pojmu.

II. LASEROVÉ OSCILACE A MÓDY OTEVŘENÉHO REZONÁTORU

Rezonátory používané pro elektromagnetické vlny v mikrovlnné oblasti mají rozměry srovnatelné s vlnovou délkou záření (cm). Tyto rezonátory mají tvar třidimensionálních dutin s vodivými stěnami = *dutinové (uzavřené) rezonátory*. S přechodem do optického pásma vyvstala otázka vhodných rezonátorů pro tuto oblast. Analogie uzavřených rezonátorů s rozměry odpovídajícími délce vlny (1 um) se ukázala nerealizovatelnou. Naštěstí se ukázalo, že lze rezonátory ve pro optické pásmo realizovat ve tvaru tzv. *otevřených rezonátorů* (analogie Fabry-Perotova rezonátoru, který je představován dvěma nekonečně velikými planparalelními rovinovými zrcadly).

Uvažujme lineární rezonátor o délce L , aktivní prostředí o délce L_m , elektromagnetickou vlnu o kruhové frekvenci :



Obr. 7. Znázornění vzniku „stojaté vlny“ v laserovém rezonátoru.

Nechť je monochromatická elektromagnetická vlna popsána komplexní amplitudou E a koeficient zesílení aktivního media je α_m (zanedbáváme ztráty) Proces zesilování znamená:

$$E(z) = E(0) \exp(\alpha_m z)$$

Výkon (nebo intenzita) světelného záření je úměrný $|E|^2$ a roste s koeficientem zesílení $2\alpha_m$

Podmínkou ustáleného stavu (prahová podmínka) je , že vlna po dvojnásobném průchodu rezonátorem je identická s původní vlnou : tj. $E(2L) = E(0)$

Pro zisk a fázový posuv , které získá vlna po dvojnásobném průchodu rezonátorem musí platit:

$$\frac{E(2L)}{E(0)} = r_1 r_2 \exp\left(2\alpha_m L_m - 2j\omega \frac{L}{c}\right) = 1 \quad (1)$$

kde $r_{1,2}$ značí amplitudový koeficient reflexe zrcadel rezonátoru.

Zanedbáme-li ztráty uvnitř aktivního prostředí a v rezonátoru celkem, a rovněž malý fázový posuv způsobený aktivním prostředím, lze rovnici (1) rozepsat na dvě separátní podmínky pro amplitudu a fázi:

$$r_1 r_2 \exp(2\alpha_m L_m) = 1 \quad (2)$$

$$\exp\left(-2j\omega \frac{L}{c}\right) = 0 \quad (3)$$

Podmínka (2) je PRAHOVÁ PODMÍNKA PRO SOUČINITEL ZISKU (tzn hustotu inverze), kterou lze přepsat na tvar

$$\alpha_m = \frac{1}{2L_m} \ln \frac{1}{r_1 r_2} \quad (4)$$

PODMÍNKU (3) PRO FÁZI A FREKVENCE V REZONÁTORU (PODELNÉ MÓDY) lze přepsat

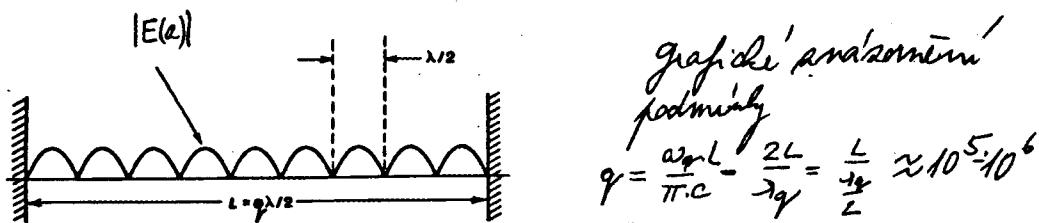
$$\left(2\omega \frac{L}{c}\right) = q2\pi, \quad \text{kde } q \text{ je celé číslo}$$

Fázový posuv, který vlna získá za dvojnásobný průchod rezonátorem musí být roven celému (velkému) násobku 2π , neboli dvojnásobná délka rezonátoru musí být rovna celistvému násobku vlnové délky

V lineárním rezonátoru je tato podmínka splněna řadou diskrétních a ekvidistantně vzdálených frekvencí ω ,

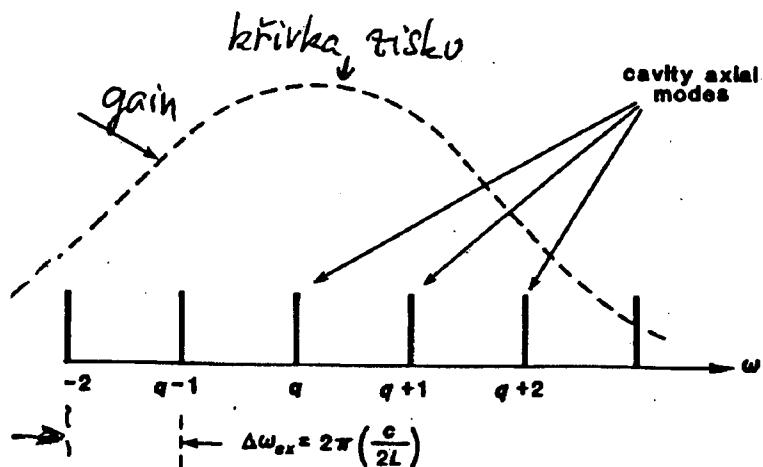
$$\omega = \omega_q = q 2\pi c / (2L) \quad (5)$$

Vlny o různých frekvencích ω_q nazýváme podélné (axiální) módy otevřeného rezonátoru.



Obr. 8. GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ PODMÍNKY (5)

Obr. 9 JEDNOTLIVÉ PODÉLNÉ MÓDY A KŘIVKA ZISKU AKTIVNÍHO PROSTŘEDÍ

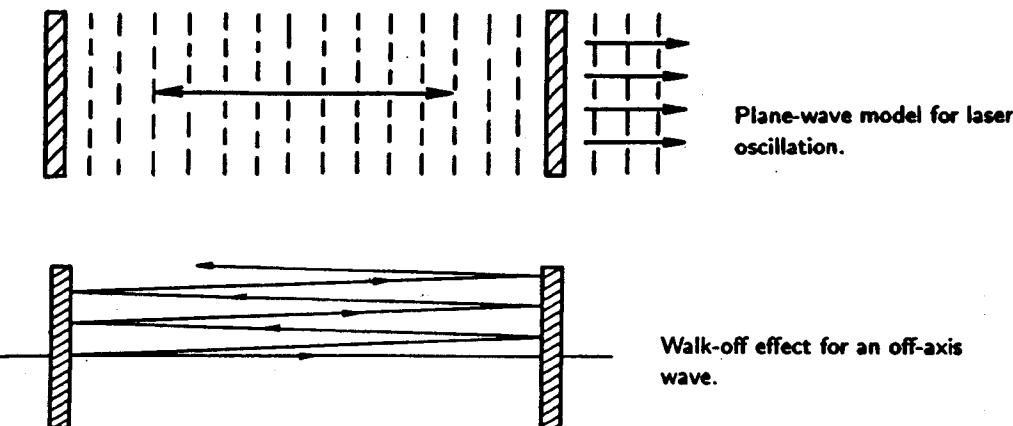


Vzdálenost dvou sousedních módů: $\Delta\omega_{ax} = \omega_{q+1} - \omega_q = 2\pi c/(2L) \approx 2\pi 300 \text{ MHz}$
Pro délku rezonátoru 50 cm.

Rezonátor připouští oscilace všech módů. O tom, které módy budou ve daném laserovém systému skutečně oscilovat bude rozhodovat aktivní prostředí, které určuje, pro které frekvence bude zisk větší než ztráty.

TRANSVERZÁLNÍ (PŘÍČNÉ) VLASTNOSTI OPTICKÉHO POLE V REZONÁTORU

Pro stanovení podmínky na vlastních frekvencích (podélné módy) otevřeného rezonátoru stačilo uvažovat pole ve tvaru rovinné vlny.



Takováto kvazi rovinná vlna má v důsledku zrcadel konečných rozměrů velké ztráty difrakcí a po jednotlivých odrazech se bude měnit její příčný profil (i fázový). Fresnelova difrakce při šíření znamená další modifikaci průřezu svazku. Tato approximace je tedy pro otevřený rezonátor se zrcadly konečných rozměrů nepřípustná. Musíme tedy uvažovat i změny optického pole ve směru kolmém na osu rezonátoru (příčný směr).

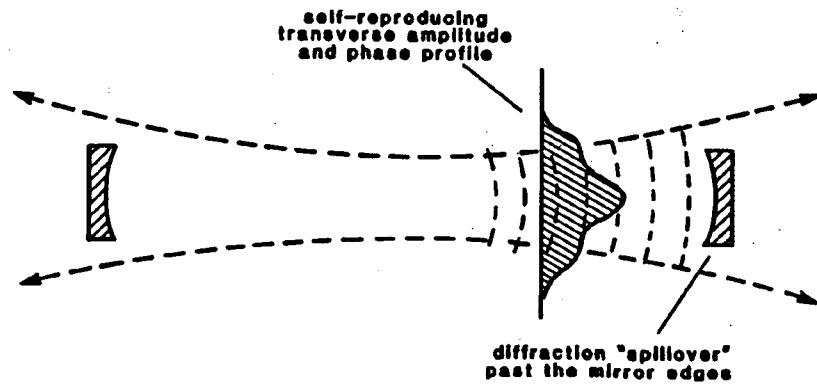
Uvažujme z praktických důvodů výhodnější rezonátor tvořený kulovými zrcadly a aperturami, omezujícími pole v příčném směru.

Budeme se ptát, co se v takovém reálném rezonátoru, který obsahuje fokusující elementy a aperty a elementy způsobující difraci, stane se šířící se optickou vlnou s daným příčným rozložením pole a danou fázovou strukturou? Otázkou je, zda existují vlny jejichž příčné profily se po dvojnásobném průchodu rezonátorem reprodukují (až na absolutní velikost, která se bude v prázdném rezonátoru zmenšovat).

Možnosti řešení - analytické řešení (Kvasil) či počítačová simulace (Fox, Li, 1960)

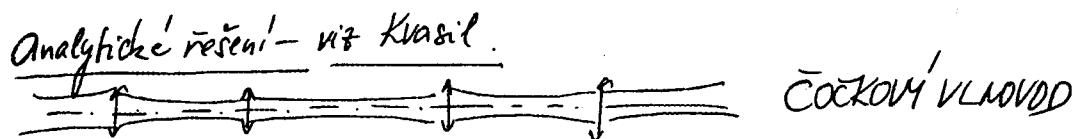
Fox, Li:

Předpokládali pro jednoduchost prázdný rezonátor bez aktivního prostředí. Ukázali, že pro určité konfigurace rezonátoru s obdélníkovými či kruhovými zrcadly konečných příčných rozměrů a poloměrů křivosti, lze najít určité diskrétní soubory amplitudových příčných a fázových konfigurací cirkulujícího pole v rezonátoru, které se po dvojnásobných průchodech reprodukují (se zmenšenou amplitudou). Tyto reprodukující se konfigurace pole nazýváme příčné (transverzální) módy otevřeného rezonátoru.



Obr.11: Příklad reprodukujícího se rozložení pole při uvažování konečných difrakčních ztrát v typickém reálném laserovém rezonátoru.

Analogie = příčné módy ve mikrovlnných a čočkových vlnovodech. (Kvasil)



Literatura ke přednášce

- 1 : Siegman: Lasers, kapitola 1
2. Saleh, Teich: Základy fotoniky, kap. 9
3. Kvasil: Teorie otevřených rezonátorů.

Přednáška č.2. : 6. října 1999 a 12. října 01

ROZLOŽENÍ INTENZITY JEDNOTLIVÝCH PŘÍČNÝCH MÓDŮ OTEVŘENÉHO REZONÁTORU

Příčnými (transverzálními) módy otevřeného rezonátoru jsme nazvali ustálené konfigurace pole v rezonátoru, charakteristické tím, že se po dvojnásobném průběhu vlny rezonátorem nemění co do tvaru rozložení intenzity pole ve směru příčném (rovina x, y) na osu rezonátoru (osa z). Využitím metody elektromagnetické optiky lze najít analytické funkce popisující průběhy intenzity elektromagnetického pole jednotlivých módů.

Jednotlivé módy lze charakterizovat jako příčné elektromagnetické vlny charakterizované třemi indexy :

TEM_{mnq} (v pravoúhlých souřadnicích) TEM_{plq} (ve válcových souřadnicích)

TEM = transverzálně elektro=magnetická (vlna)

mn (pl) = indexy označující příčný mód ($0, 1, 2, 3, 4, \dots$)

q = index označující podélný mód ($q = 10^5 - 10^6$), vzhledem k velikosti se q neuvádí a módy označujeme pouze

TEM_{mn} v případě pravoúhlých souřadnic, či TEM_{pl} v případě válcových souřadnic

Význam indexů m, n (resp. p, l):

Pravoúhlé souřadnice: m, n hodnoty odpovídají počet nul intenzity ve směru kolmém na osu rezonátoru (horizontálním a vertikálním - x, y)

Válcové souřadnice: p označuje počet nul v radiaálním směru (směr r)
 l označuje počet nul v axiálním směru (směr theta)

Se zvětšujícími se souřadnicemi m, n (resp. p, l) - hovoříme o **módech vyšších rádu**

NEJNIŽŠÍ MÓD : TEM_{00} = základní příčný mód

PRŮBĚH INTENZITY PŘÍČNÉHO MÓDU m,n (pravoúhlé souřadnice)

$$I_{m,n}(x,y,z) = I_0 \left[H_m \left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)} x \right) \exp \frac{-x^2}{w^2(z)} \right]^2 * \left[H_n \left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)} y \right) \exp \frac{-y^2}{w^2(z)} \right]^2$$

$w(z)$ poloměr svažku základního příčného módu , definovaný na úrovni $1/e^2$
maxima intensity

$H_m(s)$ Hermitův polynom m -tého rádu

Kde:

$$H_0(s) = 1$$

$$H_1(s) = 2s$$

$$H_2(s) = 4s^2 - 2$$

V daném bodě (x,y) na ose rezonátoru charakterizovaném souřadnicí z je intenzita vyjádřena jako součin složek odpovídající x a y .

Pro základní příčný mód : $m=n=0$

$$I_{0,0}(x,y,z) = I_0 \left[\exp \frac{-x^2}{w^2(z)} \right]^2 * \left[\exp \frac{-y^2}{w^2(z)} \right]^2 = I_0 \left[\exp \frac{-(x^2 + y^2)}{w^2(z)} \right]^2 = I_0 \left[\exp \frac{-2r^2}{w^2(z)} \right]$$

kde jsme zavedli

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Nechť $r = w$, pak

$$\frac{I_{00}(r,z)}{I_0} = \exp(-2) = \frac{1}{e^2}$$

DEFINICE POLOMĚRU SVAŽKU $w(z)$Intenzita klesne na hodnotu $1/e^2$
maximální hodnoty

Pro řešení rezonátorů s kruhovými zrcadly je výhodné použití válcových souřadnic. V nich pro profil intenzity módu p,l platí:

$$I_{pl}(r,\varphi, z) = I_0 \rho^l [L_p^l(\rho)]^2 \cos^2(l\varphi) \exp(-\rho)$$

Kde ρ je normalizovaný poloměr svazku (radiální souřadnice) $\rho = 2r^2(z)/w^2(z)$
 z směr osy rezonátoru

$w(z)$ poloměr gaussovského svazku odpovídajícího základnímu příčnému módu TEM00 (definován stejně jako pro pravoúhlé souřadnice)

Funkce L_p^l je Laguerrov polynom řádu p a indexu l . Hodnoty Laguerrových polynomů nejnižších řádů jsou:

$$L_0^0(\rho) = 1$$

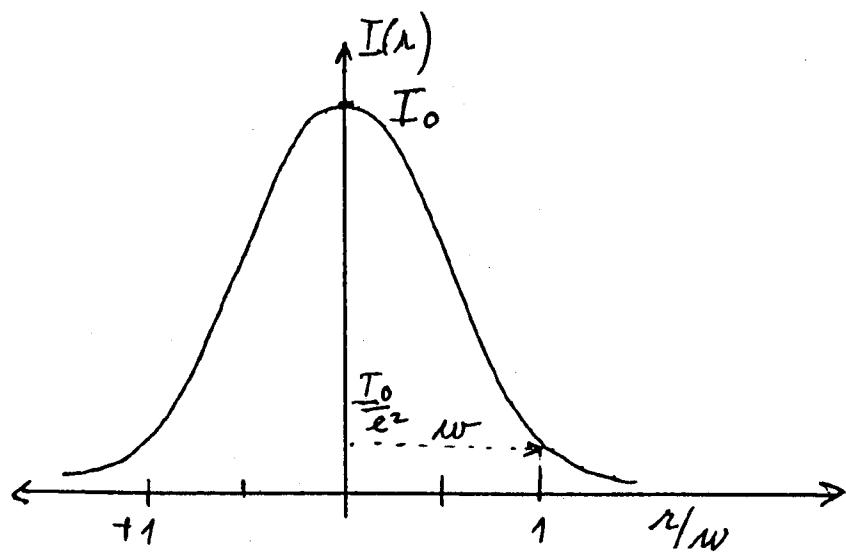
$$L_1^0(\rho) = 1 - \rho$$

$$L_2^0(\rho) = 1 - 2\rho + (1/2)\rho^2$$

Profil intenzity základního příčného módu ve válcových souřadnicích je

$$I_{00}(r,\varphi, z) = I_0 \exp(-2r^2/w^2) \dots \text{viz cvičení}$$

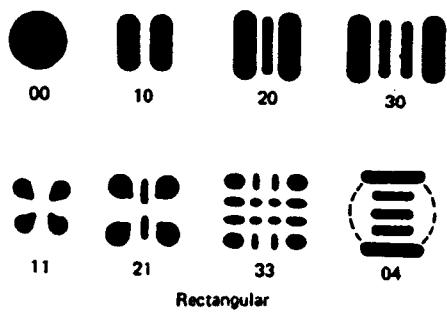
Dostali jsme opět gaussův průběh stejně jako v případě pravoúhlých souřadnic.



Obr. 13. Grafické znázornění profilu intenzity základního příčného módu TEM₀₀.

ROZLOŽENÍ INTENZITY V NEJNÍŽŠÍCH PŘÍČNÝCH MÓDECH

A. Pro rezonátory s obdélníkovými zrcadly:



Prau'khe
(obdélníkova'
zrcadla)

Obr. 14.

B. Pro rezonátory s kruhovými zrcadly:

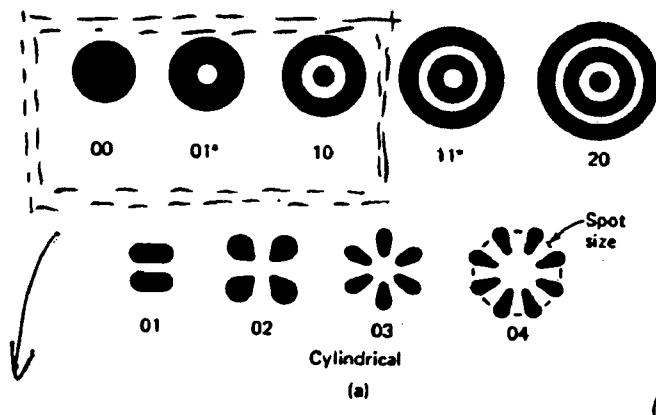


Fig. 5.1. Examples of (a) cylindrical and (b) rectangular transverse mode patterns. For cylindrical modes, the first subscript indicates the number of dark rings, whereas the second subscript indicates the number of dark bars across the pattern. For rectangular patterns, the two subscripts give the number of dark bars in the x and y directions [5.6]

Válcové
(kulová zrcadla)

Módy označené hvězdičkou jsou lineární superpozicí dvou sejních módů, z nichž jeden je otočen o 90 deg.

Obr. 15

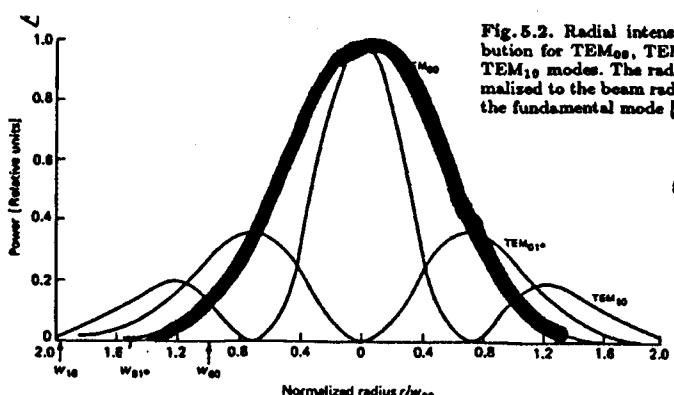
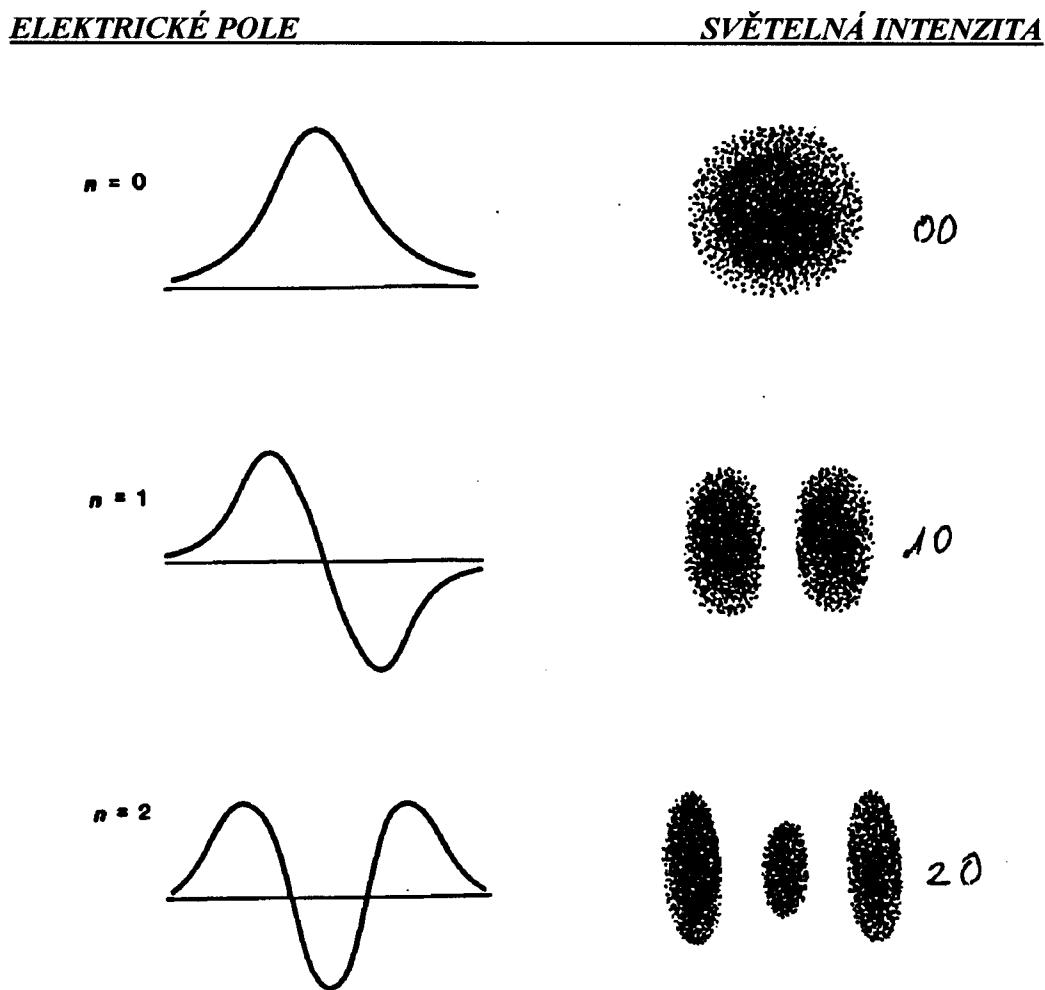


Fig. 5.2. Radial intensity distribution for TEM_{00} , TEM_{11} , and TEM_{10} modes. The radii are normalized to the beam radius w_0 of the fundamental mode [5.7]

VALCOVE'
⇒ Laguerovské
fot.

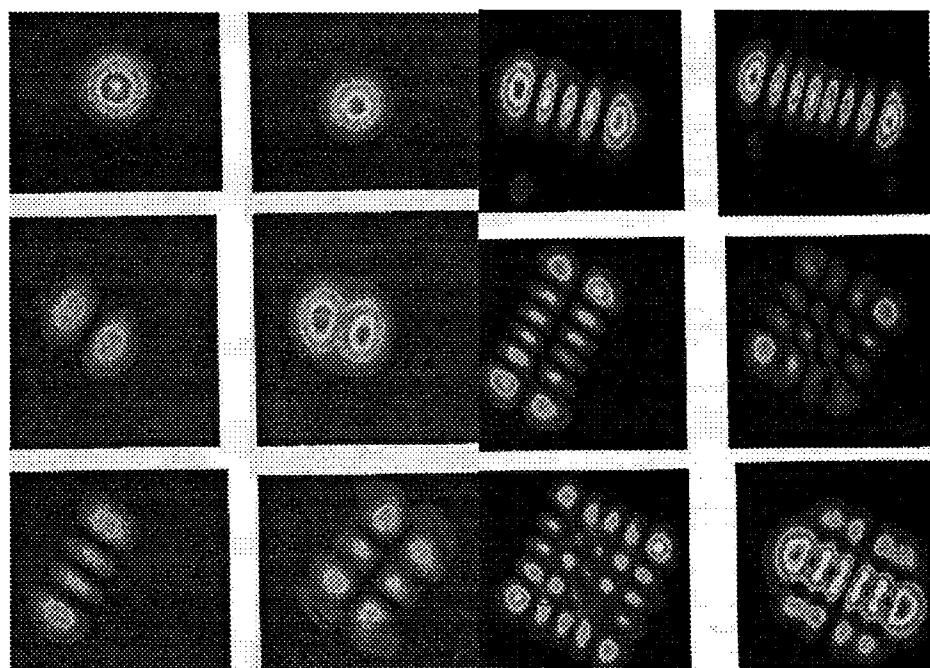
Obr. 16. Rozložení intenzity tří nejnižších kruhových módů z vrchního obrázku. Je vidět, že příčné módy vyšších řad mají větší příčný rozměr než mód TEM_{00}

PŘÍČNÉ PROFILY INTENZITY ELEKTRICKÉHO POLE A SVĚTELNÉ INTENZITY
NEJNÍŽŠÍCH HERMITOVSKÝCH MÓDŮ



ZÁVĚR: Nejdůležitější příčná konfigurace pole v rezonátoru je ta, kterou nazýváme **základním příčným módem** a značíme TEM_{00} . Svazek základního příčného módu má v každém bodě z osy rezonátoru v příčném směru **gaussovský profil**. Lze tedy konstatovat, že **gaussovský svazek** známý z optiky, elektřiny a magnetismu je **approximací základního příčného módu otevřeného rezonátoru**.

Příloha: Příčné profily záření pevnolátkového Nd:YAG laseru zobrazené CCD kamerou.



GAUSSOVSKÝ SVAZEK JAKO APROXIMACE ZÁKLADNÍHO PŘÍČNÉHO MÓDU

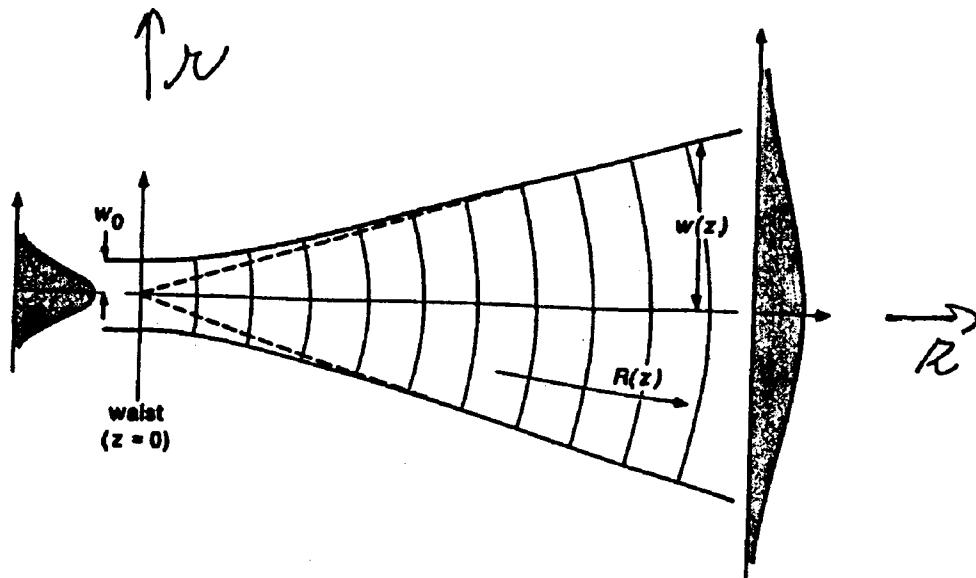
CHARAKTERISTIKY GAUSSOVSKÝCH SVAZKŮ

Světlo se může šířit ve tvaru svazků, které jsou maximálním možným způsobem prostorově lokalizovanými nedivergentními vlnami.

Rovinná a sférická vlna představují dva opačné extrémy úhlového a prostorového omezení. Normální vlnoplochy (paprsky) roviné vlny jsou rovnoběžné se směrem šíření, nedochází k žádné úhlové divergenci, přenášená energie vyplňuje celý prostor. Naopak sférická vlna se šíří z jediného bodu a její normály k vlnoploše se (paprsky) se rozvíhají do všech směrů.

Vlny, jejichž normály vlnoploch svírají malý úhel s osou z , se nazývají paraxiálními vlnami. Může splňovat paraxiální Helmholtzovu rovnici (viz např. Fotonika I, odst. 2.2C). Důležitým řešením této rovnice s vlastnostmi optického svazku je vlna nazývaná **gaussovský svazek**. Její výkon je v podstatě soustředěn uvnitř úzkého kuželetu. Rozložení intenzity v libovolné příčné rovině je dánou kruhově symetrickou gaussovskou funkcí s osou v ose svazku. Šířka této funkce je minimální v místě maximálního zúžení svazku v jeho středu a postupně se zvětšuje na obě strany. Blízko středu jsou vlnoplochy téměř rovinaté, dále se postupně zakřivují, až se ve velké vzdálenosti stanou přibližně sférickými. Pro danou šířku svazku poskytuje řešení vlnové rovnice minimální úhlovou divergenci normál k vlnoploše. Tyto normály vytvářejí v prostoru úzký svazek.

Jak bylo ukázáno v minulé části, záření vystupující z laseru v základním příčném módu má tvar gaussovského svazku. V následující části budou uvedeny jeho základní charakteristiky.



Obr. 20. Veličiny charakterizující gaussovský svazek divergující ze středu.

Předpokládejme, že se svazek šíří ve směru osy z . Závislost amplitudy pole na příčné souřadnici r , představující vzdálenost od osy, lze zapsat ve tvaru:

$$E(r) = E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{w^2}\right)$$

Průběh intenzity je :

$$I(r) = |E(r)|^2 = I_0 \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2}\right)$$

kde w je poloměr gaussovského svazku definovaný v předcházející části (2 w je průměr svazku).

Dalšími veličinami charakterizujícími gaussovský svazek jsou:

$R(z)$ poloměr křivosti vlnoplochy
 w_0 poloměr svazku ve středu

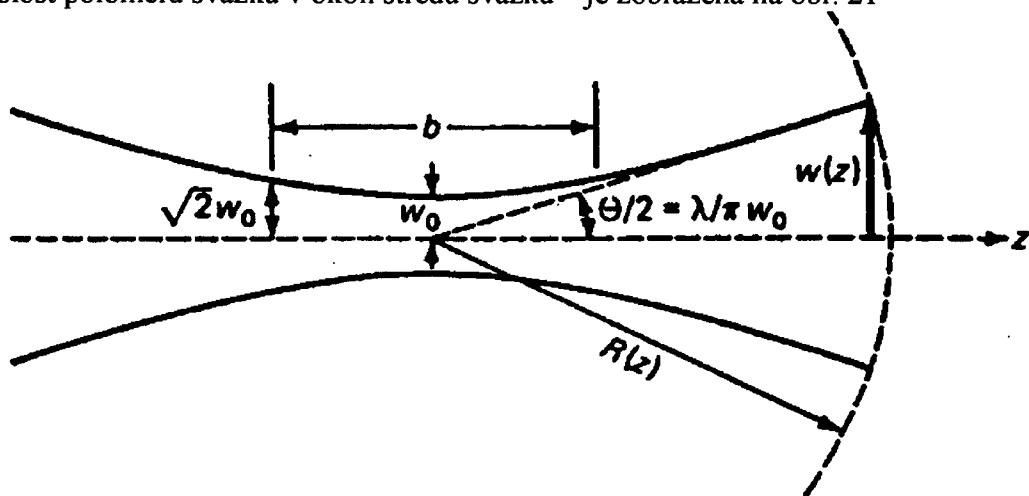
ŠÍŘENÍ GAUSSOVSKÉHO SVAZKU

Předpokládejme síření ve směru osy z . Při síření zůstává rozložení intenzity gaussovské v každém místě z , poloměr svazku se mění.

STŘED SVAZKU (krček, beam waist) je charakterizován:

- nejmenším poloměrem svazku: $w_0 = w(0)$
- roviným tvarem vlnoplochy: $R(0) = \infty$

Závislost poloměru svazku v okolí středu svazku je zobrazena na obr. 21



Obr. 21 . Profil gaussovského svazku v okolí středu svazku.

Poloměr svazku se směrem ze středu zvětšuje po hyperbole:

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Asymptoty hyperboly svírají úhel $\Theta/2$ s osou z a definují **divergenci svazku** v nekonečnu (na úrovni $1/e^2$ intenzity):

$$\text{Divergence : } \Theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2w(z)}{z} = \frac{2\lambda}{\pi w_0} = 1.27 \frac{\lambda}{(2w_0)}$$

Ve velké vzdálenosti se poloměr svazku zvětšuje lineárně se vzdáleností z a svazek se rozbíhá (diverguje) s konstantním úhlem .

Z posledního vztahu vyplývá, že čím menší je **poloměr svazku ve středu**, tím větší je **divergence**, která je pouze funkcí vlnové délky a poloměru svazku ve středu.

$$\text{Poloměr křivosti vlnoplochy : } R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]$$

Dostatečně daleko od středu má vlnoplocha kulový tvar. Vlnoplocha je místo konstantní fáze (ekvifázová vlnoplocha).

Dalším důležitým parametrem gaussovského svazku je **konfokální parametr**:

$$\text{Konfokální parametr: } b = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}$$

Představuje dvojnásobnou vzdálenost mezi středem svazku a souřadnicí z , kde má poloměr svazku hodnotu $w(z) = \sqrt{2}w_0$, to znamená místem, kde se plocha svazku oproti středu zdvojnásobi.

Polovina b se nazývá **Rayleighova vzdálenost** a značí se z_R .

$$\text{Rayleighova vzdálenost: } z_R = \frac{b}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Pak lze vztahy pro poloměr gaussovského svazku a poloměr křivosti vlnoplochy psát ve tvaru:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

pro $z \gg z_R$

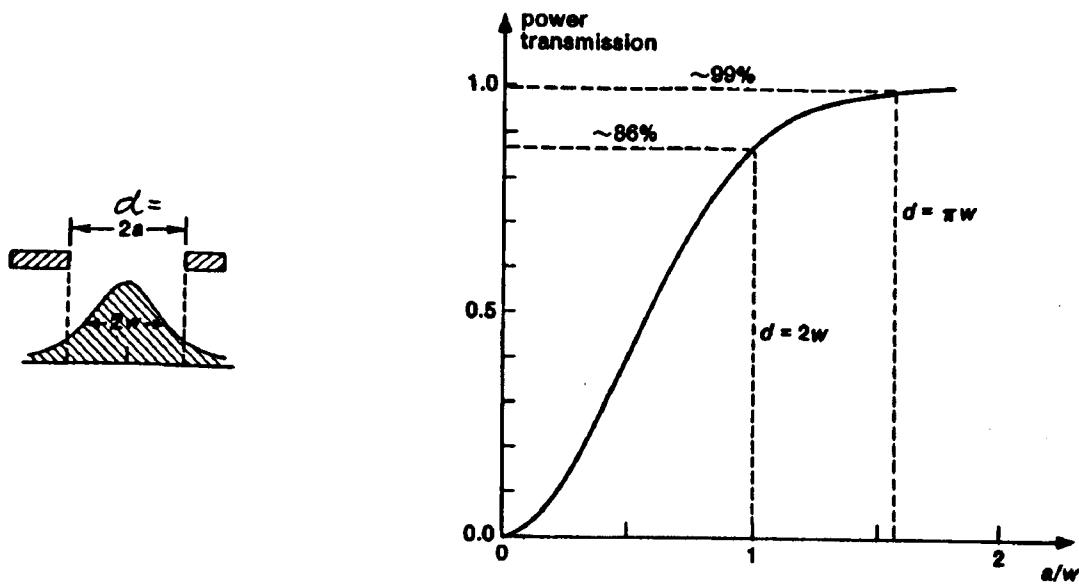
Poslední vztah lze napsat ve tvaru

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$$

PRŮCHOD GAUSSOVSKÉHO SVAZKU KRUHOVOU APERTUROU

Z hlediska šíření laserových svazků je důležité vědět, kolik energie (výkonu) se ztratí při průchodu svazku aperturou, která může být realizována objímkou zrcadla, krystalu, či clonkou.

Předpokládejme že gaussovský svazek o poloměru w dopadá na kruhovou aperturu o poloměru a (průměr aperty $d = 2a$). Graf závislosti transmise na poměru velikosti poloměrů a a w je na obrázku 22.



Obr.22. Transmise (výkonová) válcového gaussovského svazku procházejícího kruhovou aperturou.

Numerické hodnoty transmise jsou v následující tabulce:
Průměr aperty d Transmise výkonu %

$d = 2w$	86.5 %
$d = \pi w$	99 %
$d = 4w$	99.9 %
$d = 6w$	99.999 999 (ztráty 10^{-6})

Z uvedeného grafu a tabulky vyplývá, že apertura o průměru $d = \pi w$ je dostatečná k přenesení 99% výkonu. Tohoto se využívá pro selekci základního příčného módu v laserech.

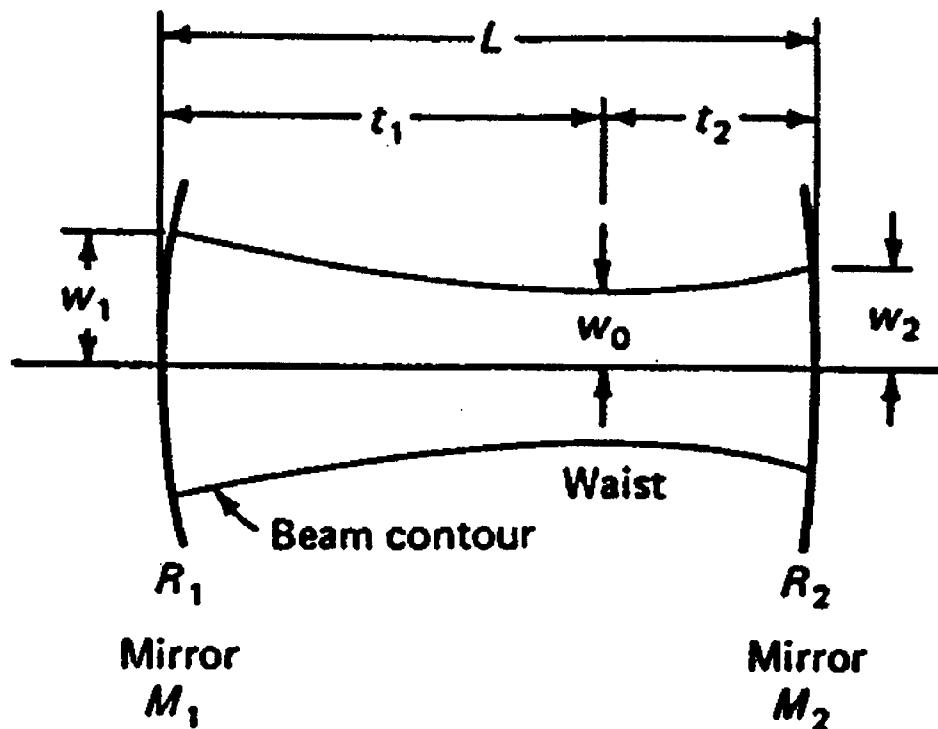
Aperty o průměru větším než $6w$ lze považovat pro gaussovský svazek za nekonečně veliké.

Přednáška č. 4: 20. října 1999 a 3.: 19. října 2001

NALEZENÍ ZÁKLADNÍHO PŘÍČNÉHO MÓDU PRO DVOUZRCADLOVÝ REZONÁTOR

V této kapitole ukážeme, jak lze pro určité konfigurace dvouzrcadlového rezonátoru tvořeného dvěma sférickými zrcadly nalézt parametry gaussovského svazku odpovídajícího základnímu příčnému módu tohoto rezonátoru.

Uvažujme situaci znázorněnou na obr. 23. Mějme dvě zrcadla o poloměrech křivosti R_1 , R_2 , vzdálená od sebe o vzdálenost L . Podaří-li se nám najít polohu středu ($z = 0$) a poloměr gaussovského svazku w_0 tak, aby poloměry křivosti zrcadel byly shodné s poloměry křivostí ekvifázových vlnoploch, pak jsme našli základní příčný mód odpovídající danému rezonátoru.



Obr. 23. Parametry základního příčného módu v rezonátoru se dvěma kulovými zrcadly o různých poloměrech křivosti.

Postupovat lze i opačně. Mějme gaussovský svazek a v místech vzdálených od středu o t_1 resp t_2 umístěme zrcadla o poloměru křivosti stejných, jako je poloměr křivosti vlnoplochy gaussovského svazku. Uvedená zrcadla pak tvoří rezonátor, pro který je daný gaussovský svazek základním příčným módem.

Na základě podobných úvah pak Kogelník a Li odvodili pro poloměry svazku základního příčného módu na zrcadlech, ve středu a pro polohu středu svazku následující vztahy:(konkávní poloměry křivostí jsou kladné)

Poloměry svazku na zrcadlech jsou:

$$\begin{aligned} w_1^4 &= \left(\frac{\lambda R_1}{\pi} \right)^2 \frac{R_2 - L}{R_1 - L} \left(\frac{L}{R_1 + R_2 - L} \right) \\ w_2^4 &= \left(\frac{\lambda R_2}{\pi} \right)^2 \frac{R_1 - L}{R_2 - L} \left(\frac{L}{R_1 + R_2 - L} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

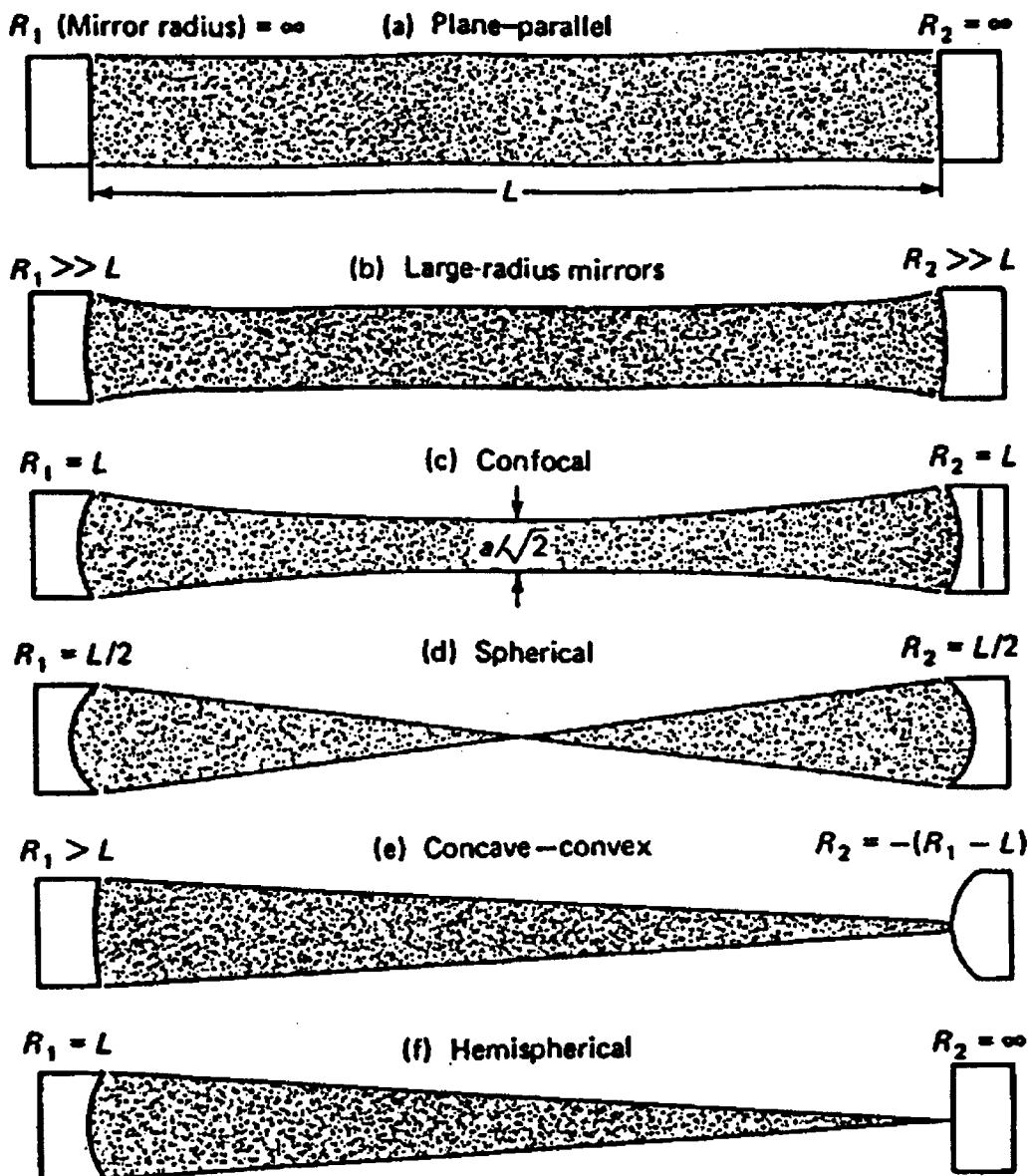
Poloměr svazku ve středu, který leží buď uvnitř nebo vně rezonátoru je

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2} \quad (20)$$

Vzdálenosti t_1 a t_2 mezi středem a zrcadly (měřeno pozitivně) jsou

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}, \\ t_2 &= \frac{L(R_1 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \end{aligned} \quad (21)$$

Tyto vztahy platí pro nejobecnější případ rezonátoru. V praxi existuje mnoho konfigurací, pro které jsou tyto vztahy značně zjednodušeny. Na následujícím obrázku jsou ukázány nejběžněji používané geometrie rezonátorů.



Obr. 24: Konfigurace rezonátorů s ekvifázovými vlnoplochami (profil záření v dutině je znázorněn stínovaně)

- a) planparalelní rezonátor
- b) rezonátor se zrcadly o velkých poloměrech křivosti
- c) konfokální rezonátor
- d) sférický rezonátor
- e) konkávní-konvexní rezonátor
- f) hemisférický rezonátor

Podívejme, jak se zjednoduší vztahy (19-21) pro určité konfigurace. Uvažujme **zrcadla o stejném poloměru křivosti**. Pak pro $R_1 = R_2 = R$ dostaneme ze vztahu (19)

$$w_{1,2}^2 = \frac{\lambda R}{\pi} \left(\frac{L}{2R-L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

Střed svazku, který je ve středu rezonátoru $t_1 = t_2 = t$ má poloměr

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} [L(2R-L)]^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

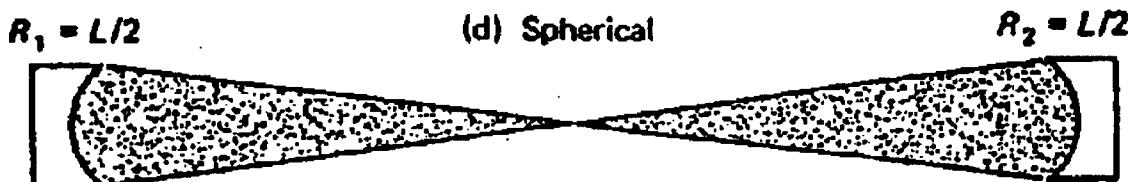
Předpokládáme-li, že jsou poloměry křivosti zrcadel mnohem větší než délka rezonátoru $R \gg L$, zjednoduší se poslední vztah na

$$w_{1,2}^2 = w_0^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) \left(\frac{RL}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Z posledního vztahu vyplývá, že v rezonátoru se zrcadly o velmi velkých poloměrech křivosti zrcadel se průměr svazku v rezonátoru mění jen velmi málo.

Podívejme se na některé z rezonátorů uvedených na obr.24 blíže.

d) Sférický rezonátor

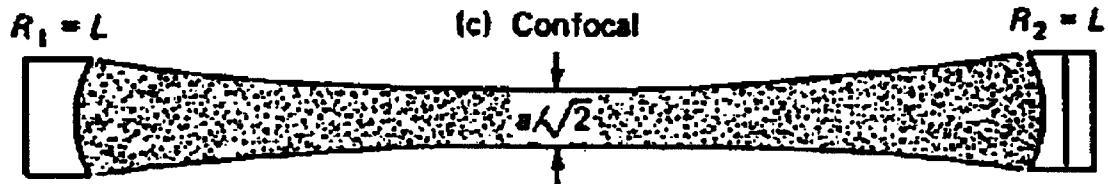


Jedná se o speciální případ symetrického rezonátoru. Je vytvořen dvěma kulovými zrcadly o stejném poloměru křivosti R , pro který platí

$$R = L/2$$

Odpovídající zkladní příčný řez má velké rozměry na zrcadlech a difrakčně limitovaný „bod“ uprostřed.

c) Konfokální rezonátor



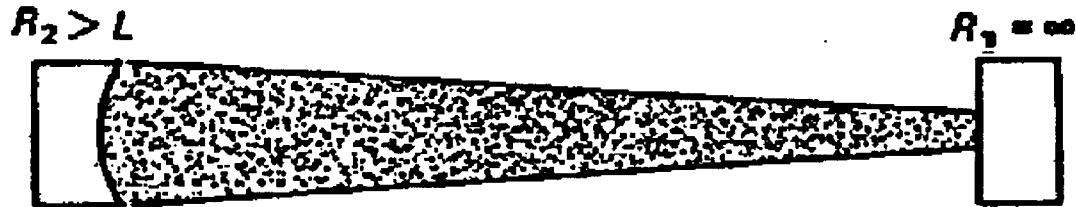
Má poloměry křivosti zrcadel stejné a rovné délce rezonátoru $R_1=R_2=L$
Pro poloměry svazku ~~svazku~~ dostaneme

$$w_{1,2} = \left(\frac{\lambda R}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$w_0 = \frac{w_{1,2}}{\sqrt{2}}$$

Konfokální rezonátor je velmi důležitý rezonátor. Má nejmenší možný rozměr módu pro danou délku rezonátoru.

Plano-konkávní rezonátor



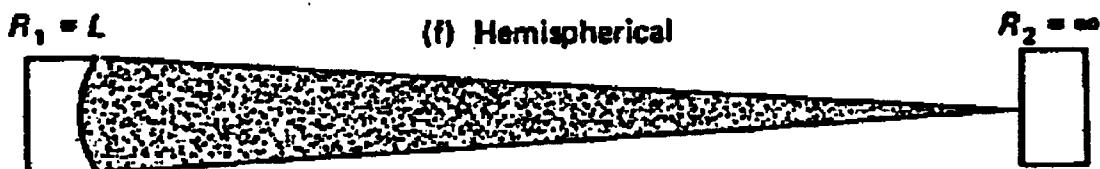
Rezonátor, mající jedno zrcadlo rovinné a druhé kulové. $R_1 = \infty, R_2 < \infty$
Pro poloměry svazku platí

$$w_1^2 = w_0^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) [L(R_2 - L)]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

$$w_2^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right) R_2 \left(\frac{L}{R_2 - L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

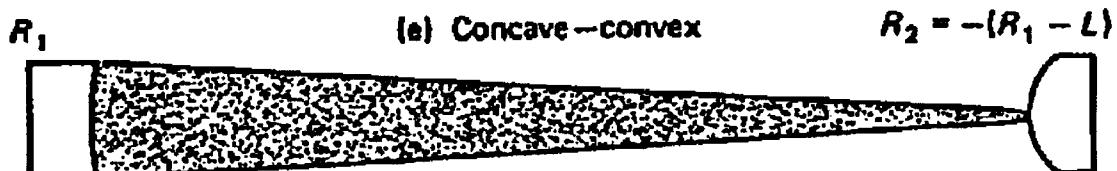
Střed svazku je vždy na rovinném zrcadle ($t_1=0$, $t_2=L$). Speciálním případem planokonkávního rezonátoru je hemisférický rezonátor.

f) Hemisférický rezonátor



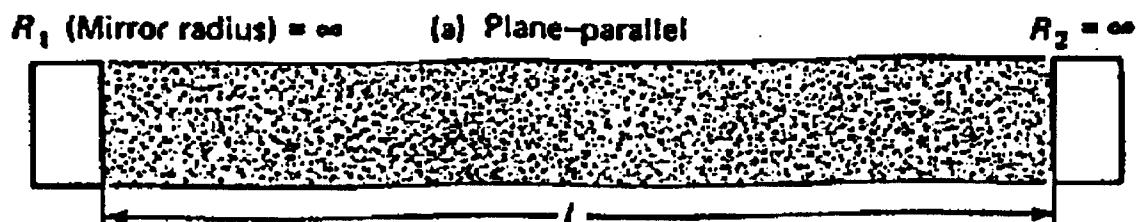
Pro tento rezonátor platí $L \approx R$. Poloměr svazku na rovinném zrcadle je difrakčně limitovaná velikost „ohniska“. Rozměry svazku se vypočítají ze vztahu pro $L \rightarrow R_2$. Tomu odpovídá $w_2 \rightarrow \infty, w_1 \rightarrow 0$ (rezonátor se stává nestabilním). Prakticky se volí $L < R_2$ (velmi blízko k R_2), ale tak, aby difrakční ztráty nebyly příliš veliké.

e) Konkávně-konvexní rezonátor



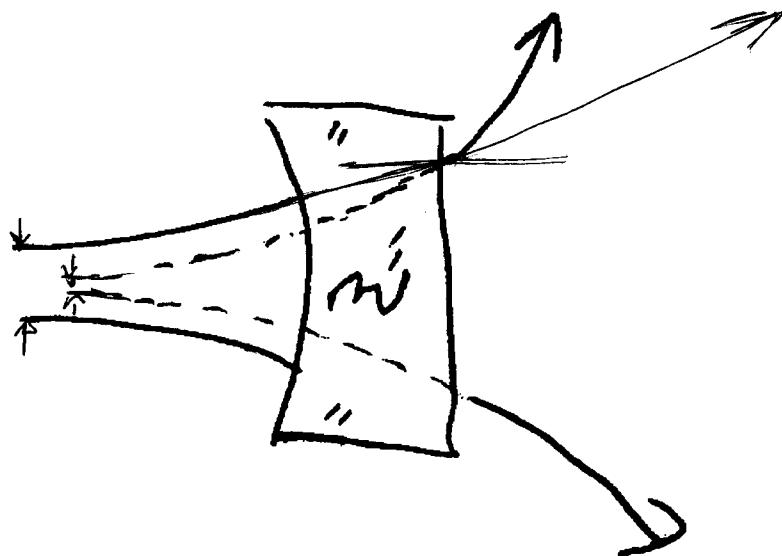
Parametry svazku lze spočítat ze vztahů (19)-(21), dosazením záporné veličiny pro poloměr křivosti R_2 .

a) Planparallelní rezonátor



Jedná se o speciální případ rezonátoru s velkými poloměry křivosti zrcadel (b) pro $R_1 = R_2 = \infty$. Z numerické analýzy Foxe a Li takovýto rezonátor nemá výstupní mód ekvífázovou plochu na zrcadlech. Vlivem velkých difrakčních ztrát na hranách zrcadel vzniká velké fázové zpoždění, které způsobuje zakřivení vlnoplochy.

Poznámka: Vliv tvaru plano-konvexního zrcadla na charakteristiku výstupního svazku z rezonátoru.



Obr.25. Průchod svazku plano-konvexním zrcadlem

Vlivem geometrického tvaru podložky zrcadla se toto výstupní zrcadlo chová jako rozptylná čočka, takže svazek vystupující z rezonátoru se jeví, jakoby měl střed v jiném místě rezonátoru, než je tomu ve skutečnosti. Poloměr svazku ve středu pak je

$$w_0' = w_0 \left(1 + \frac{L(n^2 - 1)}{2R} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (27)$$

a „poloha“ středu je místo o souřadnici

$$t_2 = \left(\frac{L}{2} \right) \frac{nR}{R + L(n^2 - 1)/2} \quad (28)$$

STABILITA OTEVŘENÉHO REZONÁTORU

Pro některé kombinace parametrů R_1 , R_2 a L nedávají rovnice (19) – (21) fyzikální řešení. Jsou to případy, kdy pro takový rezonátor neexistují módy o nízkých ztrátách a nelze najít tedy odpovídající základní příčný mód ve tvaru gaussovskeho svazku. Podmíinku na to, kdy lze pro uvedené rovnice nalézt fyzikální řešení lze napsat ve tvaru

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) * \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1 \quad (29)$$

Tento vztah se nazývá *podmínka stability otevřeného rezonátoru* a rezonátory jejichž parametry tuto podmíinku splňují se nazývají *stabilní rezonátory*. Rezonátory, které tuto podmíinku nesplňují se nazývají *nestabilní rezonátory*.

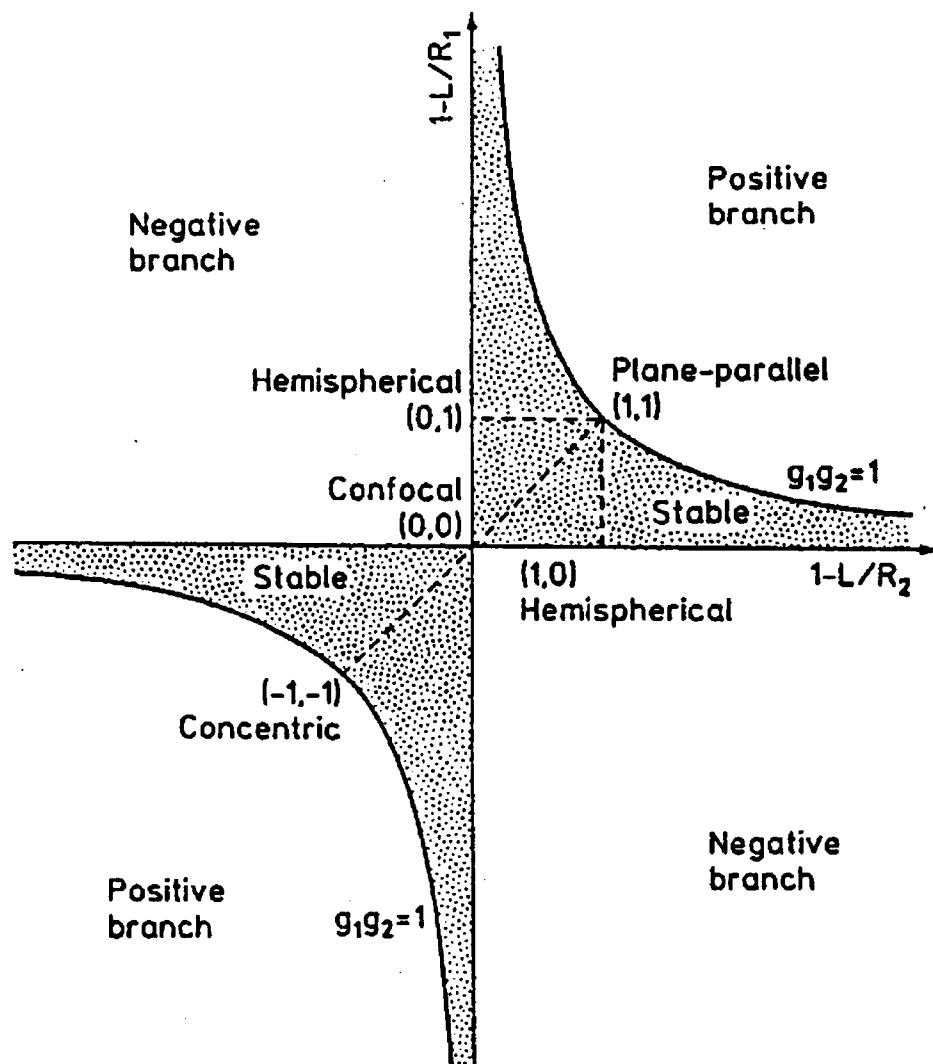
Podmíinku stability lze vyjádřit v grafické formě po zavedení tzv. *g - parametrů*

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 - \frac{L}{R_1} \\ g_2 &= 1 - \frac{L}{R_2} \end{aligned} \quad (30)$$

když ji lze zapsat ve tvaru

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (31)$$

a znázornit graficky (viz obr.26).



Obr.26. Diagram stability otevřeného rezonátoru

Všechny konfigurace rezonátorů, ležící mimo vyšrafovanou oblast vymezenou rameny hyperboly $g_1 g_2 = 1$ a osami souřadnic jsou nestabilní a tato oblast představuje oblast vysokých ztrát. Počátek soustavy souřadnic představuje konfokální rezonátor. Rezonátor ležící na čárkovanej čáre svírajici úhel 45° vzhledem k osám jsou symetrické rezonátory, to je jsou tvořeny zrcadly o stejných poloměrech křivosti. Stabilní a nestabilní rezonátory se liší difrakčními ztrátami, o kterých budeme hovořit v následujícím paragrafu.

DIFRAKČNÍ ZTRÁTY

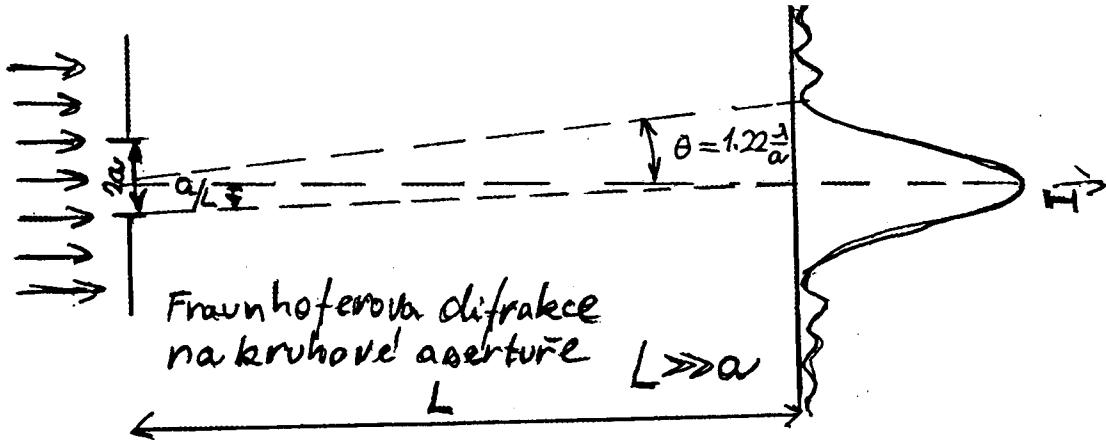
V rezonátoru s konečnými rozměry zrcadel dochází k úniku části energie kolem jejich okrajů. Těmto ztrátám energie se říká **difrakční ztráty**. Kromě těchto z hlediska laseru neužitečných ztrát je část energie z rezonátoru vyváděna skrz jedno polopropustné zrcadlo. Těmto ztrátám říkáme **činné ztráty**.

Uvažujme rezonátor se sférickými zrcadly o poloměrech křivosti R_1, R_2 vzdálených od sebe o délku L , a nechť je příčný rozměr zrcadel charakterizován poloměrem a . Velikost difrakčních ztrát je kromě těchto veličin závislá ještě na parametrech λ, m, n , které charakterizují mód. Naštěstí ztráty závisí na určitých kombinacích těchto parametrů, které nazýváme **Fresnelovo číslo**

$$N = \frac{a^2}{\lambda L} \quad (32)$$

a veličinách g_1, g_2 definovaných v . Parametr N může být chápán jako poměr poměr úhlu (a/L) pod kterým se jeví jedno zrcadlo ze středu protějšího zrcadla k difračnímu úhlu λ/a svazku. Schema Fraunhoferovy difrakce rovinné vlny dopadající na kruhový otvor, je znázorněno na obrázku 27.

(Rovinná vlna dopadající na aperturu o poloměru a . Po průchodu divergentní svazek s úhlovým poloměrem prvního difrakčního minima rovným veličině $1.22\lambda/a$).



Obr.27. Schema Fraunhoferovy difrakce rovinné vlny dopadající na kruhový otvor

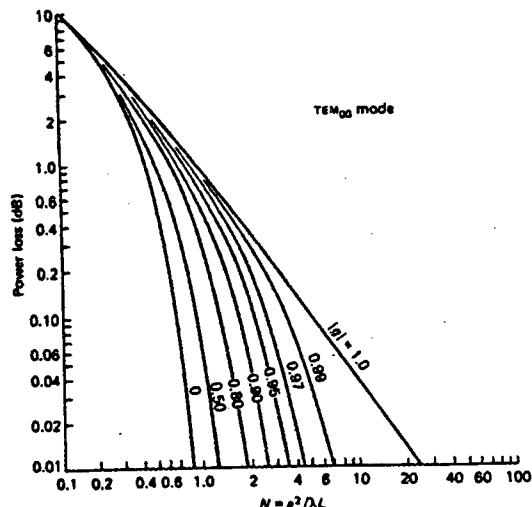
Tudíž, je-li N malé, zvláště je-li $N < 1$, budou difrakční ztráty velké, protože pouze část svazku bude dopadat na protější zrcadlo. Pro velká N budou ztráty pro stabilní rezonátory

malé a pro nestabilní rezonátory velké. Mají-li dva rezonátory stejné hodnoty N, g_1 a g_2 , pak mají stejně difrakční ztráty, stejné rezonanční frekvence a stejné příčné módy. Energie ztracená ze základní příčného módu během jednoho oběhu záření rezonátorem identickými zrcadly ($g_1=g_2=g$) je na obr.28 a.

Difrakční ztráty několika nejnižších módů konfokálního rezonátoru jsou znázorněny na obr. 28 b. Označení módu odpovídá cylindrickým souřadnicím. Vidíme, že všechny módy mají velké ztráty pro malé hodnoty Fresnelova čísla N a že se tyto ztráty se vzrůstajícím N podstatně snižují. Ztráty pro módy vyšších řad u však klesají podstatně pomaleji než než pro módy nižších řad.

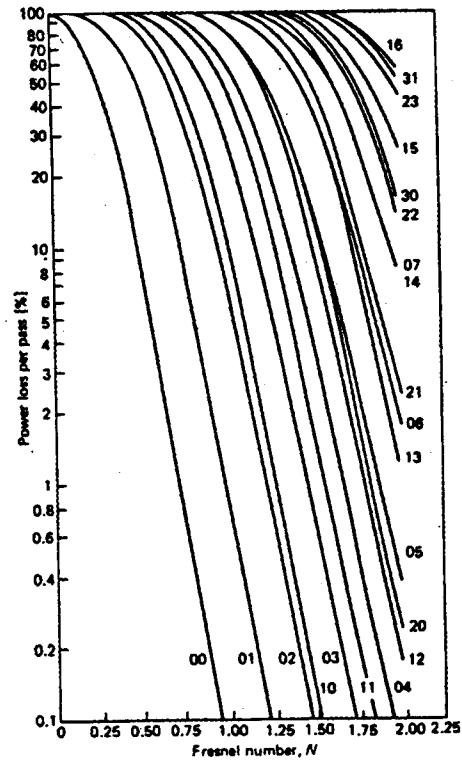
Př 1.: $a = 1 \text{ cm}$, $\lambda = 1 \text{ um}$, $L = 1 \text{ m}$ $N=100$

Př 2.: $a = 1 \text{ mm}$ $N = 1$.



Diffraction losses per transit for the TEM_{00} mode of various symmetrical and stable resonators

(a)



Diffraction loss for various resonator modes as a function of the Fresnel number

(b)

Obr.28. Energie ztracená ze základní příčného módu během jednoho oběhu záření rezonátorem identickými zrcadly ($g_1=g_2=g$) (a).

Difrakční ztráty několika nejnižších módů konfokálního rezonátoru (b). Označení módu odpovídá cylindrickým souřadnicím.

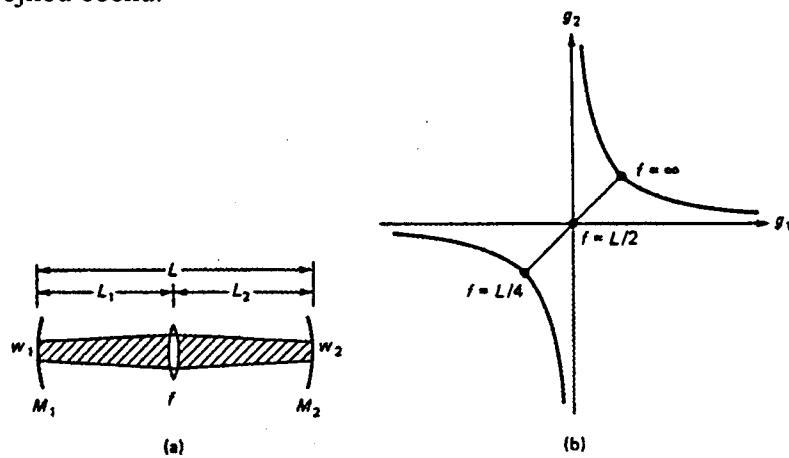
AKTIVNÍ REZONÁTOR

Až dosud jsme uvažovali prázdný rezonátor tvořený pouze zrcadly. Vložení aktivního materiálu nezmění pouze optickou délku rezonátoru, ale změní i módovou strukturu, jelikož aktivní prostředí (laserový krystal) vykazuje saturovatelný nehomogenní zisk a vykazuje čočkový efekt díky teplotním jevům a rovněž indukovaný dvojlot.

Budeme dále uvažovat pouze nejjednodušší případ, kdy rezonátor kromě zrcadel obsahuje tenkou čočku, jak je znázorněno na obrázku 29 a. Takovýto rezonátor může být nahrazen ekvivalentním prázdným rezonátorem s g parametry danými vztahy

$$\begin{aligned}g_1 &= 1 - \frac{L_2}{f} - \frac{L_0}{R_1} \\g_2 &= 1 - \frac{L_1}{f} - \frac{L_0}{R_2} \\kde L_0 &= L_1 + L_2 - \left(\frac{L_1 L_2}{f} \right)\end{aligned}\quad (33)$$

kde f je ohnisková délka vnitřní čočky, L₁ a L₂ jsou vzdálenosti mezi zrcadly M₁, M₂ a čočkou. Obrázek 29 b ukazuje diagram stability rezonátoru obsahujícího tenkou spojnou čočku.



Obr. 29. Geometrie (a) a diagram stability rezonátoru obsahujícího tenkou spojnou čočku (b).

V libovolném rezonátoru lze velikost základního příčného módu TEM₀₀ na jednom zrcadle vyjádřit pomocí g-parametrů

$$w_1^2 = \frac{\lambda L}{\pi} \left(\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Poměr velikostí svazku na zrcadlech je

$$\frac{w_1^2}{w_2^2} = \frac{g_2}{g_1} \quad (35)$$

Podmínka stability (29) zůstává v platnosti beze změny.

Jako příklad uvažujme **rezonátor v planparallelní konfiguraci R1 = R2 = ∞ a tenkou čočku uprostřed (L1 = L2 = L/2)**. Z výše uvedených vztahů dostaneme

$$g = g_1 = g_2 = 1 - \frac{L}{2f}$$
$$w_1^2 = w_2^2 = \left(\frac{\lambda L}{\pi} \right) (1 - g^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Pro f → ∞ je konfigurace rezonátoru plan-paralelní, pro f=L/2 dostáváme ekvivalent konfokálního rezonátoru a pro f=L/4 rezonátor odpovídá sférickému rezonátoru.

Velikost základního příčného módu poroste do nekonečna, když se bude vzdálenost zrcadel rovnat čtyřnásobné hodnotě ohniskové vzdálenosti. Obr.29 b ukazuje polohu zmíněných rezonátorů s termickou čočkou v diagramu stability,

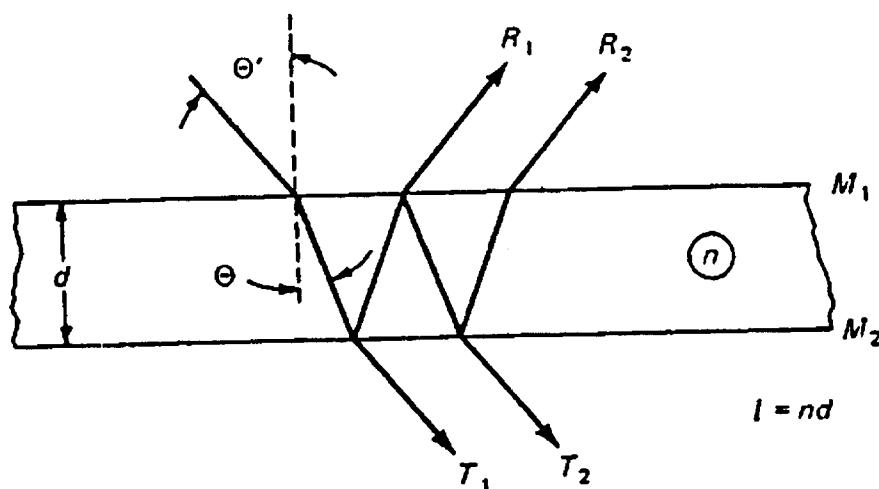
PODÉLNÉ MÓDY

Otevřený rezonátor nepůsobí pouze na příčné rozložení intenzity elektrického pole, ale jak bylo uvedeno v přednášce č. 1, ovlivňuje rovněž frekvenční (spektrální) vlastnosti záření. Působí jako určitý filtr, neboť povoluje (hromadí) záření pouze na určitých diskrétních frekvencích. Těmto složkám lišícím se frekvencí říkáme *podélné módy*.

Selekční vlastnosti otevřeného rezonátoru budeme demonstrovat na jeho idealizovaném případu, kterým je Fabry-Perotův rezonátor, jehož základní vlastnosti byly odvozeny a jsou uvedeny např. ve skriptu Základy laserové techniky. V dalším výkladu budeme postupovat podle Koechnera.

Fabry-Perotův rezonátor

je tvořen dvěma rovnoběžnými optickými povrchy nekonečných rozměrů M_1 M_2 . Uvažujme rovinnou vlnu dopadající na tento rezonátor (etalon), podle obrázku 30. Mají-li oba povrchy reflektivitu menší než 1, pak se část záření vždy od povrchu odrazí a zbytek projde. Násobné odrazy tak dají vzniknout jednotlivým složkám interferujícím v místě povrchů. Na povrchu M_2 vznikne konstruktivní interference, mají-li interferující složky stejnou fázi a naopak destruktivní interference, mají-li fázi opačnou. V případě konstruktivní interference tedy veškerá energie dopadající na povrch M_1 etalonem projde, zatímco v opačném případě se všechna energie odrazí.



Obr30. Interference rovinné vlny na planparalelní desce o indexu lomu n.

Pro sousední odražené nebo procházející vlny je fázový rozdíl dán vztahem:

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) 2nd \cos \Theta \quad (36)$$

kde nd je optická tloušťka mezi odraznými povrchy, $\Theta = \Theta' / n$ je úhel lomu v materálu a λ je vlnová délka.

Transmise Fabry - Perotova rezonátoru je

$$T = \left[1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right]^{-1} \quad (37)$$

kde r je reflektivita jednotlivých povrchů. Maximální hodnota transmise $T_{\max} = 1$ bude v případě, že je-li dráhový rozdíl mezi dvěma prošlymi svazky roven celistvému násobku vlnové délky, to jest

$$2nd \cos \Theta = m \lambda : \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Reflektivita rezonátoru je

$$R = \left(1 + \frac{(1-r)^2}{4r \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)} \right)^{-1} \quad (38)$$

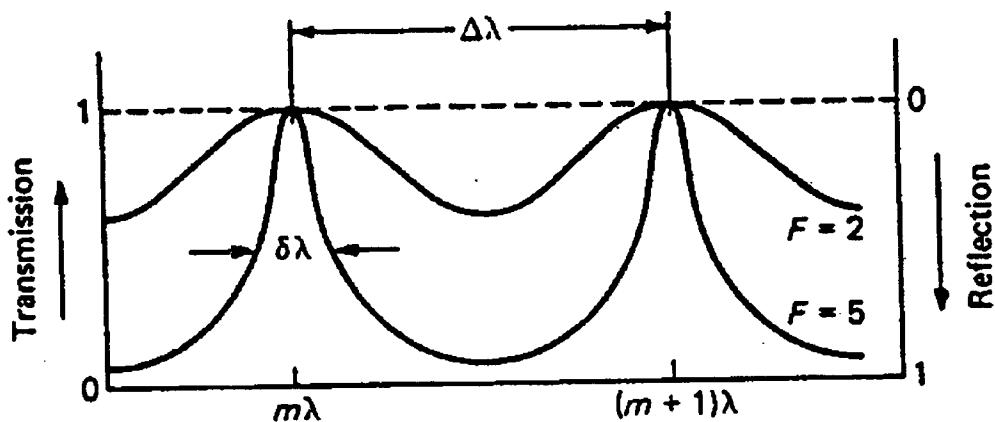
Maximální hodnota reflektivity je

$$R_{\max} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad (39)$$

je-li dráhový rozdíl dvou sousedních vln roven lichým násobkům poloviny vlnové délky

$$2nd \cos \Theta = m \lambda/2 : \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Obr. 31 znázorňuje transmisi a reflektivitu etalonu, což jsou komplementární veličiny, pro něž platí $R+T=1$.



Obr31. Intensita odraženého a prošlého záření jako funkce fázového rozdílu mezi svazky.

Definujeme **finesu (jemnost) rezonátoru** jako $F=\Delta\lambda/\delta\lambda$:

$$F = \pi \left[2 \arcsin \left(\frac{2+4r}{(1-r)^2} \right)^{-1/2} \right]^{-1} \approx \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \quad (40)$$

Tato approximace platí, je-li $r > 0.5$. Pro malé hodnoty r se finesa blíží dvěma a vztah pro reflektivitu se redukuje na :

$$R = R_{\max} \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (41)$$

Z výše uvedených vztahů vidíme, že rezonanční podmínka závisí na vlnové délce λ , optické délce nd a úhlu lomu Θ . Libovolná změna těchto veličin způsobí posuv frekvenčního pásma rezonátoru. Rozdíl mezi dvěma sousedními maximy $\Delta\lambda$ se nazývá **šířka spektrálního pásma etalonu**.

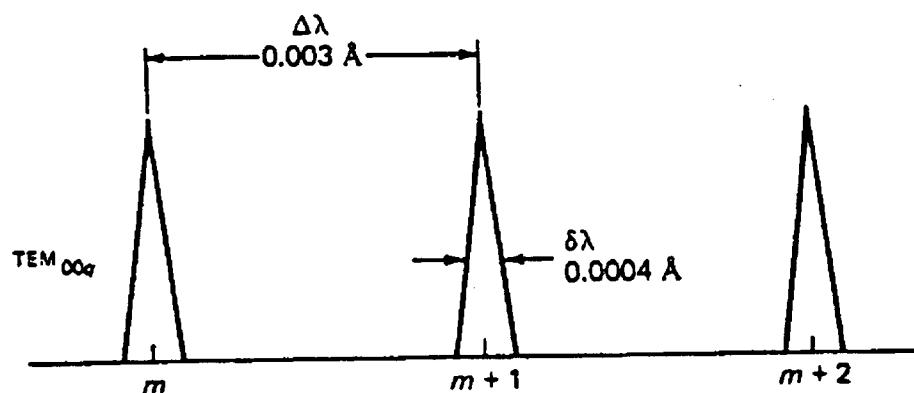
LASEROVÝ REZONÁTOR

Fabry-Perotův rezonátor lze považovat za idealizovaný otevřený rezonátor. Uvažujeme-li jeden příčný mód, pak je vzdálenost dvou sousedních podélných módů

$$\Delta\lambda = \left(\frac{\lambda_0^2}{2L} \right) \quad \text{nebo} \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L} \quad (42)$$

kde L je optická délka rezonátoru.

Pro rezonátor s délkou $L= 75$ cm a $\lambda_0= 694.3$ nm (rubínový laser) dostaneme $\Delta\lambda = 0.003$ Å. Pro rubínový laser (šířka spektrální čáry čáry 0.5 Å) to znamená, že uvnitř této čáry bude moci oscilovat 160 módů. Jsou-li hodnoty reflektivity jednotlivých zrcadel různé, jak tomu v případě laserového rezonátoru s jedním polopropustným zrcadlem bývá, pak za reflektivitu r musíme dosazovat veličinu $r = (R_1 R_2)^{1/2}$. Typické hodnoty pro rezonátor impulsního laseru jsou $R_1= 0.5$, a $R_2= 1.0$. Dosazením těchto hodnot do vztahu (40) dostaneme $F=8.5$ a $\delta\lambda= 0.0004$ Å (*finesa a spektrální šířka jednoho módu*). Viz následující obrázek.



Obr 32. Podélné módy prázdného rezonátoru tvořeného dvěma zrcadly o reflektivitách 50% a 100% vzdálených od sebe 75 cm.

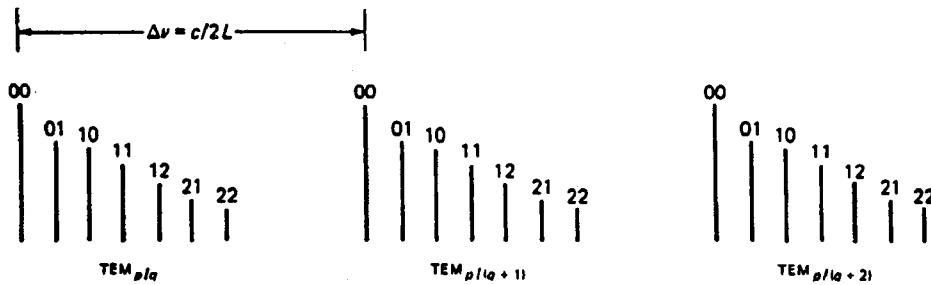
V případě, kdy v rezonátoru osciluje několik příčných módů, se objevují další rezonanční frekvence. Frekvenční vzdálenost pro obecný mód TEM_{plq} je dána vztahem

$$\Delta\nu = \left(\frac{c}{2L} \right) \left[\Delta q + \left(\frac{1}{\pi} \right) \Delta(2p+l) \arccos \left(1 - \frac{L}{R} \right) \right] \quad (43)$$

Člen na pravé straně obsahující Δq má za důsledek frekvenční vzdálenost axiálních módů odpovídající základnímu příčnému módu. Člen s $\Delta(2p+l)$ popisuje rezonanční frekvence transverzálních módů vyšších řad. Je vidět, že rezonanční frekvence závisí na součtu příčných indexů a ne nezávisle na jednotlivých indexech. Případ pravoúhlých souřadnic odpovídá záměně členu $(2p+l)$ za člen $(m+n)$.

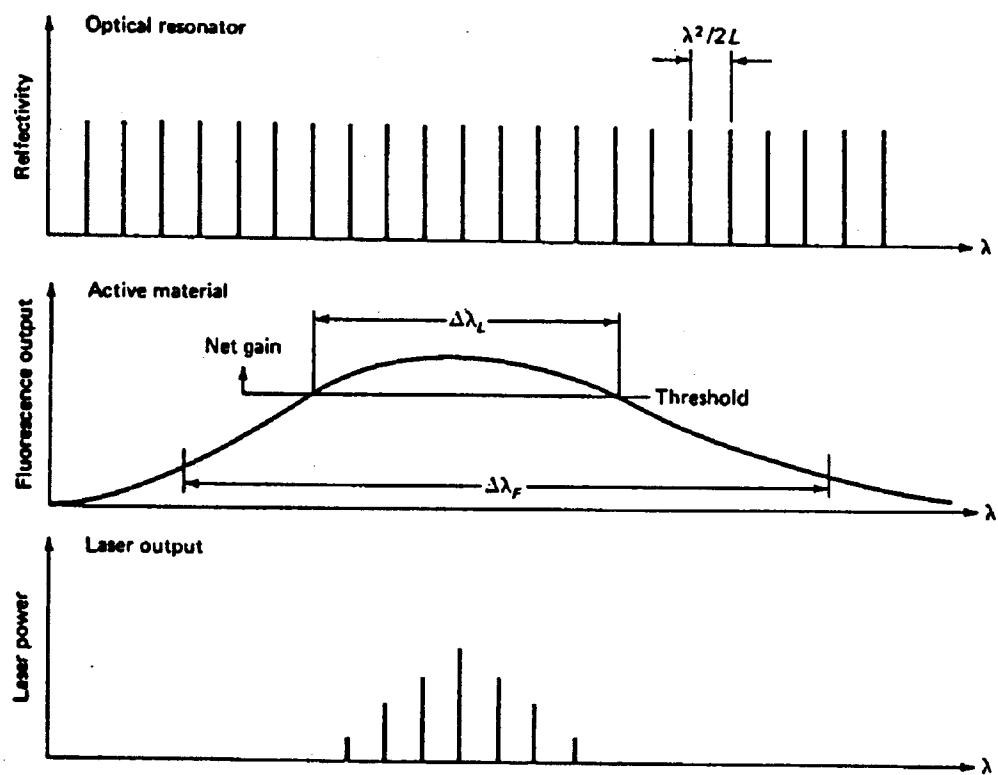
Z posledního vztahu je zřejmé, že frekvenční vzdálenost mezi různými transverzálními módy není pouze funkcí délky rezonátoru, ale také funkcí poloměru křivosti zrcadel R .

Pro rezonátor s velkými poloměry křivosti ($L \ll R$), který se blíží planparallelnímu rezonátoru, je druhý člen ve výrazu (43) malý ve srovnání s Δq . V tomto případě se rezonanční spektrum skládá z relativně hodně vzdálených složek (o vzdálenost $c/2L$), odpovídajících danému podélnému módu, z nichž každá je obklopena řadou rezonančních frekvencí odpovídajících příčným módům vyšších řadů jak je zobrazeno na obr. 33.



Obr 33. Rezonanční spektrum rezonátoru se zrcadly o velkých poloměrech křivosti.

V obecném případě je tedy výstupní záření laseru složeno ze všech rezonančních frekvencí laserového rezonátoru ležících uvnitř spektrální čáry zisku aktivního materiálu.



Obr.34. Znázornění spektrálních složek laserového výstupního záření v případě bez selekce podélných módů.

Pro **zužování spektra záření** v pevnolátkových (i jiných) laserech se nejčastěji používá dodatečný Fabry-Perotův rezonátor který může jako **rezonanční reflektor** nahrazovat výstupní zrcadlo, nebo **natočený etalon** uvnitř rezonátoru. Obě metody jsou diskutovány v následující části.

REZONANČNÍ REFLEKTOR

Fabry-Perotovu rezonátoru s fixní vzdáleností odrazených ploch se říká často **etalon**. Je-li tento etalon použit na místě výstupního zrcadla laserového rezonátoru, říká se mu **rezonanční reflektor**. Nejčastěji je tvořen planparalelní přesně vyleštěnou dielektrickou (skleněnou) deskou o indexu lomu n a tloušťce d . Rezonanční reflektor se používá v maximu reflektivity při kolmém dopadu záření

Hodnotu maximální reflektivity pro dielektrický etalon dostaneme, dosadíme-li za reflektivitu jedné odrazené vrstvy do vzorce (39) hodnotu

$$r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (44)$$

což je reflektivita rozhraní vzduch-dielektrikum o indexu lomu n pro kolmý dopad.

Maximální reflektivita takového jednodeskového etalonu pak je dána vztahem (39):

$$R_{\max} = \frac{4r}{(1+r)^2}$$

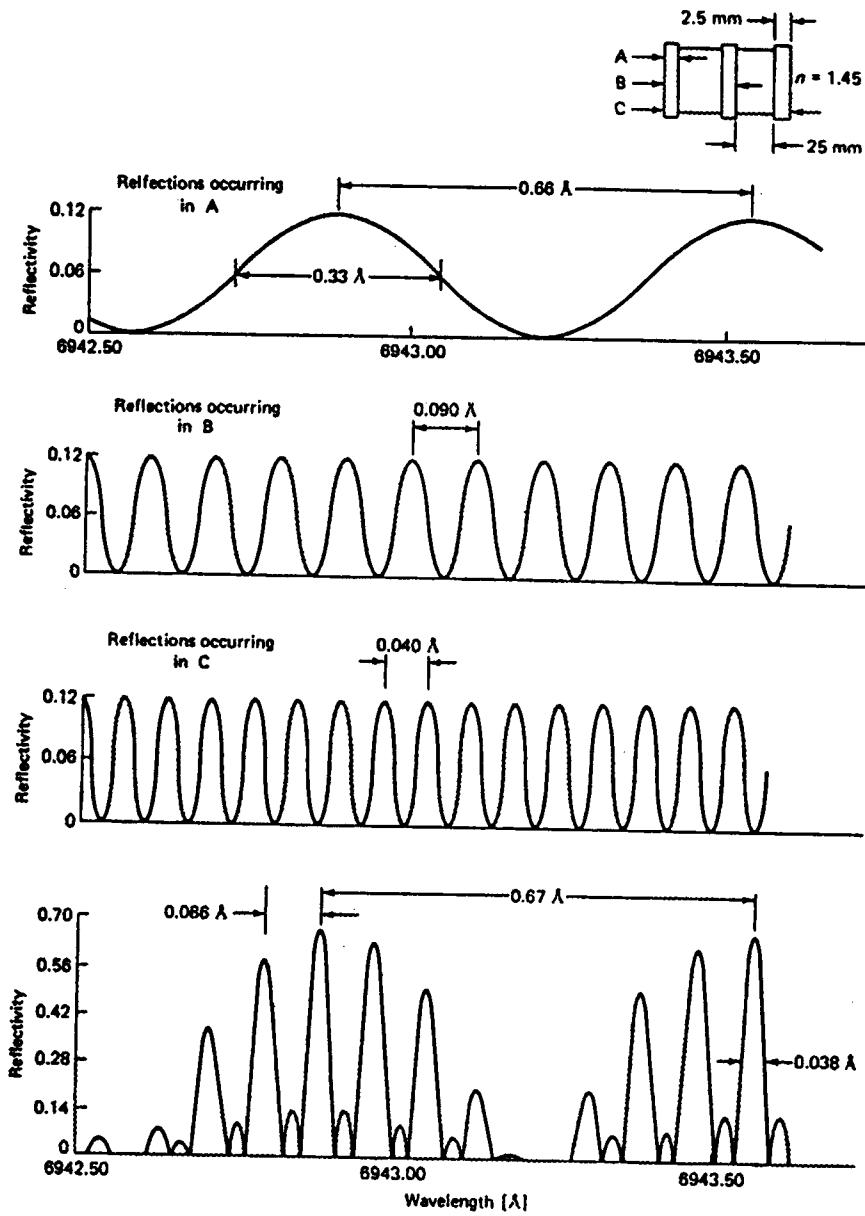
Jako příklad uvažujme safirový ($n=1.76$) etalon o tloušťce $d = 3.2$ mm pro rubínový laser ($\lambda = 694.3$ nm). Z předchozích vzorců pak dostaneme maximální reflektivitu $R_{\max} = 0.27$ a vzdálenost reflekčních píků $\Delta\lambda = 0.43$ Å a šířku jednoho piku $\delta\lambda = 0.22$ Å.

Pro srovnání, skleněný etalon ($n=1.45$) má maximální reflektivitu $R_{\max} = 0.12$. Spektrální charakteristiky křemenného etalonu tloušťky 2.5 mm jsou na obr. 35 (vrchní křivka)

Resonanční píky několikanásobných rezonačních reflektorů složených z více desek jsou ostřejší a mají větší vzdálenost než reflektory skládající se z jedné desky. Maximální reflektivita multielementového rezonančního reflektoru složeného z $N/2$ desek o indexu lomu n je

$$R_{\max} = \left(\frac{n^N - 1}{n^N + 1} \right)^2 \quad (45)$$

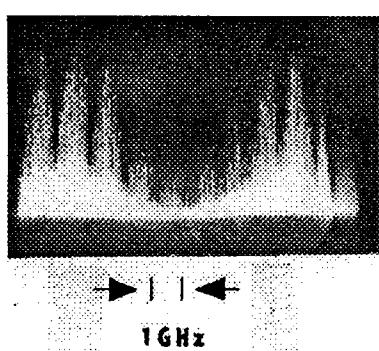
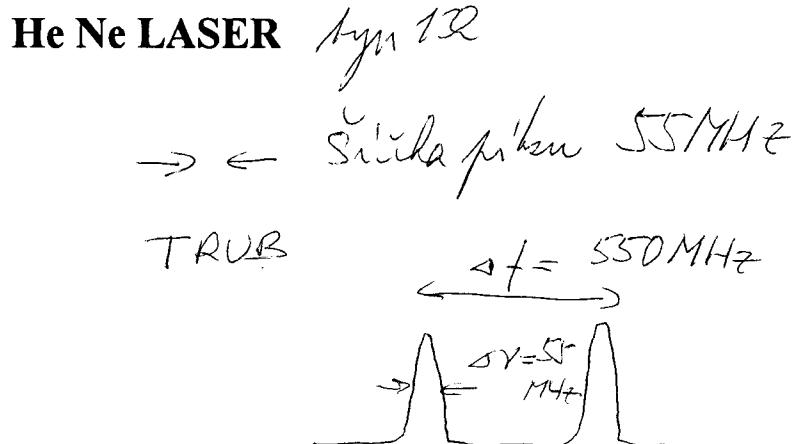
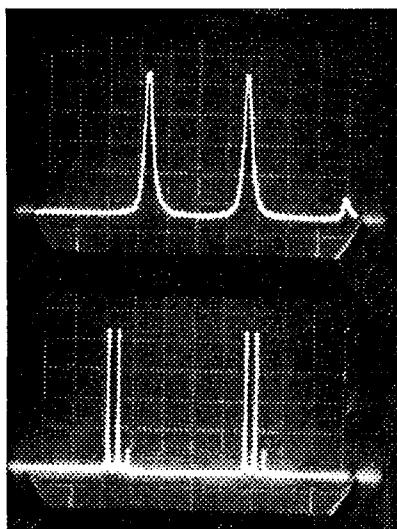
Na následujícím obrázku je provedena analýza činnosti rezonančního reflektoru složeného ze tří křemenných desek o tloušťce 2.5 mm. Vzdálenosti mezi deskami jsou 25 mm. Spodní křivka ukazuje vypočítanou reflektivitu celého reflektoru v oblasti generace rubínového laseru. Maximum reflektivity tohoto rezonančního reflektoru je 65%, šířka jednoho píku je 0.038 Å. Výsledná křivka vznikla složením reflexí na jednotlivých sub-etalonech znázorněných na vrchním obrázku. Volbou parametrů rezonančního reflektoru tak lze ovlivňovat spektrální vlastnosti výstupního záření laseru. Ke stejnemu účelu lze použít nakloněného etalonu uvnitř rezonátoru (využívá se změna transmise).



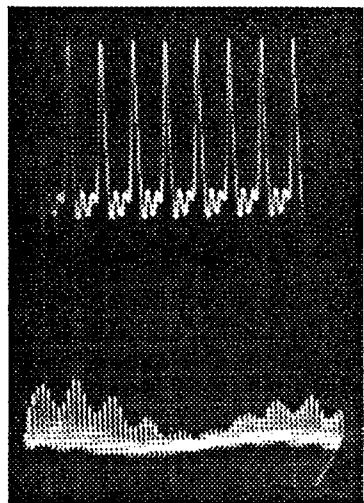
Obr 35. Analýza rezonančního reflektoru složeného ze tří křemenných desek. (Viz Koechner).

— 45 —

Příklady spekter naměřených pomocí skanujícího Fabry Perotova interferometru



Volně běžící Nd:YAG laser (experiment)



Mode-Locked Nd:YAG laser

Přednáška č. 7 (6).

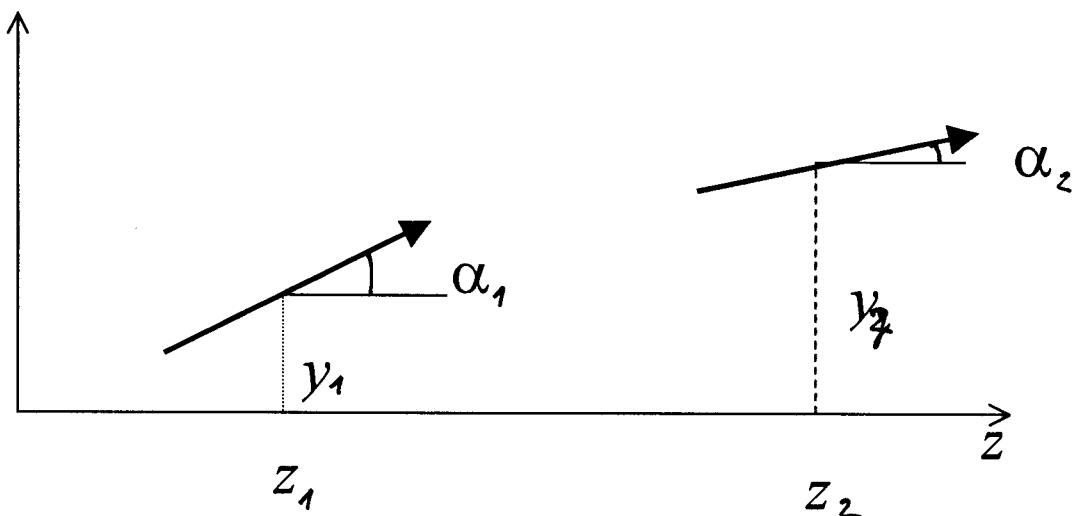
ŘEŠENÍ OTEVŘENÝCH REZONÁTORŮ MATICOVOU METODOU

Návrh a analýzu otevřených rezonátorů lze provádět pomocí počítačových programů jako je např. PARAXIA vyvinutá na Stanford University a nabízená firmou Sciopt Enterprises.

Program je založen na maticové metodě, pomocí níž se stanoví dráhy paraxiálních paprsků v přiblžení tzv. maticové optiky.

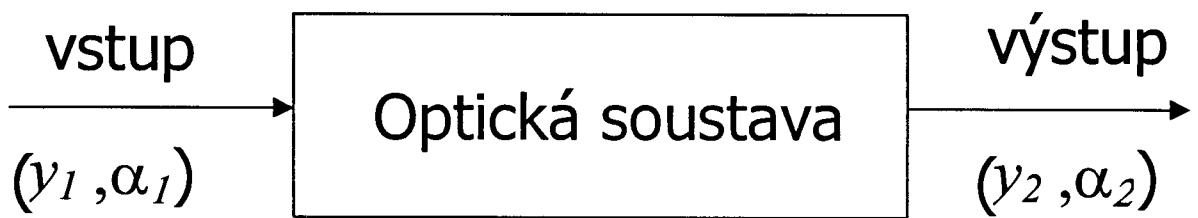
Optický paprsek je popsán dvěma veličinami:

- vzdálenost od optické osy (y) a
- směrnicí úhlu (α), který paprsek svírá s optickou osou.



Obr. 36. parametry pro popis optického paprsku v paraxiální approximaci.

Optická soustava je charakterizována čtvercovou maticí (2x2) která se nazývá **přenosová matice optické soustavy**.



Je-li **paraxiální** paprsek vstupující do soustavy charakterizován dvojicí parametrů (y_1, α_1) a paprsek vystupující ze soustavy dvojicí (y_2, α_2) , lze vztah mezi těmito dvěmi paprsky zapsat ve tvaru

$$y_2 = A y_1 + B \alpha_1$$

$$\alpha_2 = C y_1 + D \alpha_1$$

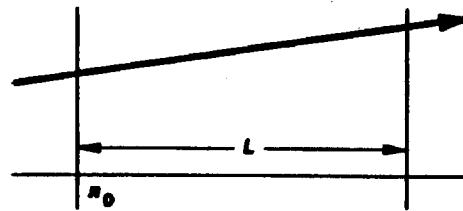
kde A,B,C,D jsou reálná čísla.

Tento vztah lze zapsat pomocí matic

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

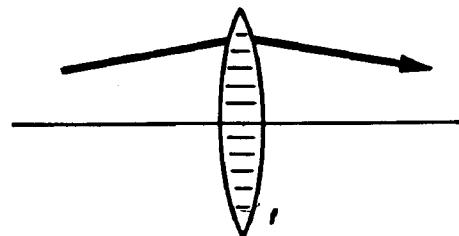
Přenosové matice pro některé optické prvky jsou uvedeny na obrázku 38:

(a) "Free space" region, index n_0 , length L



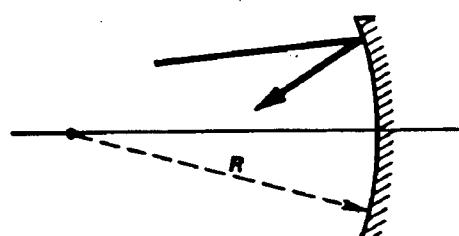
$$\begin{bmatrix} 1 & L/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Thin lens, focal length f
 $f > 0$ for converging lens



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Curved mirror, radius R , normal incidence
 $R > 0$ for concave mirror



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix}$$

Obr. 38. Příklady přenosových matic.

Analogicky:

Volný prostor (vakuum) délky d : $M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Lom na rovinném rozhraní dielektrik o indexu lomu n_1, n_2

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Podobné jednoduché přenosové matice lze napsat i pro ostatní optické prvky.

Přenosová matice M řady po sobě následujících optických elementů charakterizovaných maticemi $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots, M_N$ bude rovna

$$M = M_N \dots M_4 M_3 M_2 M_1 \quad (47)$$

Výsledná přenosová matice soustavy je rovna součinu přenosových matic jednotlivých prvků (*v opačném pořadí*).

PERIODICKÉ SOUSTAVY = POSLOUPNOSTI IDENTICKÝCH PRVKŮ

Výsledná matice periodické soustavy je rovna součinu N identických matic $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

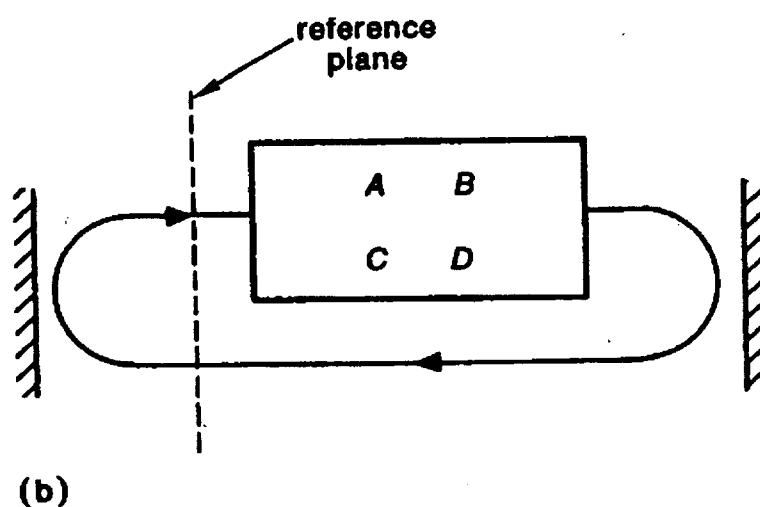
Podmínka harmonické trajektorie, znamenající že paprsek zůstává paraxiální a nediverguje od osy je

$$\frac{A+D}{2} \leq 1 \quad (48)$$

Tato podmínka je ekvivalentní podmínce stability otevřeného rezonátoru. Pro determinant přenosové matice platí

$$\det M = AD - BC = n_1/n_2 \quad (49)$$

Na základě výše uvedených vztahů jsme schopni napsat pro libovolný optický rezonátor odpovídající přenosovou matici charakterizující oběh paprsku rezonátorem.



(b)

Přenosové matice pro průchod paprsku jednoduchým rezonátorem tvořeným dvěma kulovými zrcadly - viz CVIČENÍ.

V další části ukážeme jak lze takové přenosové matice využít pro nalezení parametrů základního příčného módu rezonátoru.

TRANSFORMACE GAUSSOVSKÉHO SVAZKU OPTICKÝM SYSTÉMEM CHARAKTERIZOVANÝM PŘENOSOVOU MATICÍ M.

Víme, že Gaussovský svazek je v libovolném místě plně charakterizován poloměrem křivosti vlnoplochy $R(z)$ a přičným poloměrem svazku $w(z)$.

Uvažujme šíření ve vakuu a zavedeme komplexní poloměr svazku $q(z)$ definovaný vztahem

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (50)$$

Průchod gaussovského svazku o vstupním komplexním poloměru q_1 optickým systémem s přenosovou maticí s prvky A,B,C,D lze zapsat ve tvaru

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (51)$$

kde q_2 je komplexní poloměr výstupního gaussovského svazku. (Srovnej se vztahem pro transformaci paprsku).

Je-li přenosová matice přenosovou maticí pro celý oběh rezonátorem, lze parametry gaussovského svazku pro ustálený stav pro nejž platí $q_1 = q_2 = q$ získat ze vztahu

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (52)$$

Tento vztah lze přepsat jako kvadratickou rovnici

$$\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \frac{A-D}{B}\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1-AD}{B^2} = 0 \quad (53)$$

s využitím vztahu $AD-BC=1$. Tato kvadratická rovnice má dvě řešení

$$\frac{1}{q_a}, \frac{1}{q_b} = \frac{D-A}{2B} \pm \frac{1}{B} \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \quad (54)$$

z nichž alespoň jedno s negativní imaginární částí bude představovat hledaný základní příčný mód.

Tento případ nastane, jsou-li maticové elementy přenosové matice A,B,C,D reálné, to je neuvažujeme- li ztrátové prvky v rezonátoru jejichž ztráty se mění v závislosti na vzdálenosti od osy a je-li splněna podmínka stability rezonátoru, kterou lze pomocí maticových elementů zapsat ve tvaru

$$-1 \leq m \leq 1 \quad (55)$$

kde $m=(A+D)/2$ je polovina stopy přenosové matice. Tato situace odpovídá stabilnímu dvouzrcadlovému rezonátoru s gaussovským svazkem jako základním příčným módem.

Řešení výše uvedené kvadratické rovnice pak lze zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{q_a}, \frac{1}{q_b} = \frac{D-A}{2B} \mp j \frac{\sqrt{1-m^2}}{B} = \frac{1}{R} \mp j \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (56)$$

kde první člen je reálný a druhý člen je ve všech případech imaginární. V závislosti na znaménku veličiny B, které může být buď kladné, nebo záporné, jedno ze dvou možných řešení pak odpovídá hledanému gaussovskému svazku s kladným poloměrem svazku w .

Jinými slovy řečeno, pro *jakýkoliv otevřený rezonátor složený z libovolného počtu optických prvků, s čistě reálnou přenosovou maticí ABCD splňující podmíanku stability $m^2 < 1$, existuje základní příčný mód ve tvaru gaussovského svazku tak jako tomu bylo v případě jednoduchého rezonátoru složeného pouze ze dvou zrcadel.*

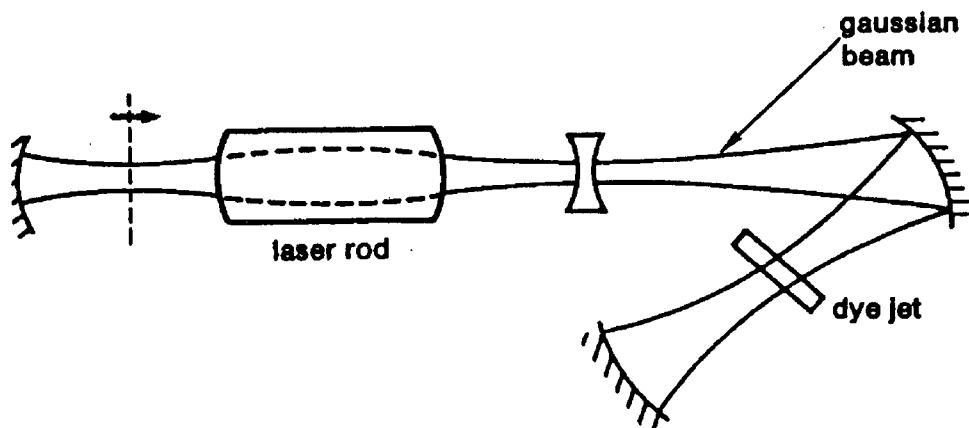
Poloměr křivosti vlnoplochy hledaného gaussovského svazku v dané referenční rovině pak je

$$R = \frac{2B}{D-A} \quad (57)$$

a **poloměr svazku** je

$$w^2 = \frac{|B|\lambda}{\pi} \times \sqrt{\frac{1}{1-m^2}} \quad (58)$$

Příklad takového gaussovského módu stabilního mnohocomponentového rezonátoru je ukázán na následujícím obrázku. Ostatní řešení odpovídají nefyzikálním svazkům s intenzitou rostoucí v příčném směru na optickou osu a lze je ignorovat.



Obr.40: Příklad gausovského svazku v rezonátoru z více elementů.